Corso di Analisi Matematica
Serie numeriche

Laurea in Informatica e Comunicazione Digitale
A.A. 2013/2014

Università di Bari

Serie numeriche

- Motivazione: dare significato alla somma di infiniti numeri reali.
- Per gli antichi greci sommare infiniti numeri e ottenere un risultato finito era considerato paradossale (come mostra il celebre paradosso di Achille e la tartaruga).
- In realtà non è così paradossale che una somma di infiniti addendi possa dare un risultato finito.
  Esempi: area del quadrato, misura di un'asta.

Serie numeriche

Definizione

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, si chiama serie numerica *la scrittura formale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

che si legge "serie o somma per n da 0 a ∞ di a_n".

Serie numeriche

Per dare significato a questo nuovo simbolo, si costruisce nuova successione $\{s_n\}$ i cui termini sono così definiti come segue.

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0\\
&s_1 = a_0 + a_1\\
&\vdots\\
&s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si noti che

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Serie numeriche

Definizione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, *il numero* s_n *sopra definito viene detto* *somma parziale* n*-esima* *della serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

La successione $\{s_n\}$ *si chiama* *successione delle somme parziali* *della serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Serie numeriche

Definizione

Sia $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali. La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *è convergente, divergente o irregolare se la successione* $\{s_n\}$ *delle sue somme parziali è convergente, divergente o irregolare.*
In particolare, se $\{s_n\}$ *è convergente e* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *si dice che* s *è la somma della serie e si scrive*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Osservazioni

- Se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente allora vale la seguente relazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n \to +\infty} s_n.$$

  Si definisce la somma di infiniti addendi calcolando il limite per $n \to +\infty$ della somma finita dei primi n addendi.

- L'espressione "studiare il carattere di una serie" significa stabilire se la serie converge, diverge o è irregolare.

Osservazioni

- Talvolta invece che sommare a partire da 0 si parte da un certo intero N:
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n.$$

- Parlare di una serie coinvolge sempre due diverse successioni: la succ. $\{a_n\}$ dei termini della serie e la succ. $\{s_n\}$ delle sue somme parziali. Fare bene attenzione a quale delle due si riferiscono le affermazioni fatte!

Serie geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$. Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

che prende il nome di serie geometrica.
La sua somma parziale n–esima, per ogni $n \geq 0$, è

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1; \\ n+1 & \text{se } q = 1. \end{cases}$$

Serie geometrica

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1; \\ +\infty & \text{se } q\geq 1; \\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1. \end{cases}$$

Dunque, la serie geometrica

- converge se $|q|<1$ e
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q};$$
- diverge (a $+\infty$) se $q\geq 1$;
- è irregolare se $q\leq -1$.

Serie di Mengoli

È la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

che è convergente ed ha per somma 1.
Infatti

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

da cui

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Si tratta di un caso particolare di serie telescopica.

Serie telescopiche

Una serie di termini a_n, $n \geq N$, si dice telescopica se il suo termine generale

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

ove $\{b_n\}_{n \geq N}$ è una opportuna successione di numeri reali.
La somma parziale n–esima di una serie telescopica è dunque data da

$$s_n = b_N - b_{n+1}.$$

Il carattere di una serie telescopica dipende dal carattere della successione $\{b_n\}_{n \geq N}$.

Serie armonica

Serie armonica: è la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ed è divergente.

Serie armonica generalizzata: è la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ed è

- divergente se $\alpha \in (-\infty, 1]$;
- convergente se $\alpha \in (1, +\infty)$.

Condizione necessaria per la convergenza

Teorema

Sia $\{a_n\}_{n\geq N}$ *una successione di numeri reali.*

Se la serie $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *è convergente allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

- Non vale il viceversa (controesempio: serie armonica).
- Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste o esiste ma è diverso da 0 allora $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ non converge.

Resto di una serie

Teorema

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *una serie convergente. Allora per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *converge anche la serie*

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

(detta serie resto della serie di partenza) e, detta R_n *la sua somma, cioè*

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

si ha

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = 0.$$

Operazioni e serie

Se due serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono convergenti allora

- la serie somma $\sum (a_n + b_n)$ è convergente;
- per ogni $c \in \mathbb{R}$ la serie $\sum c\, a_n$ è convergente.

Serie a termini non negativi

Una serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ è a termini non negativi se $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq N$.

Proprietà:

- La successione delle somme parziali di una serie a termini non negativi è crescente:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Da qui si ricava che

- Una serie a termini non negativi o è convergente o è divergente (a $+\infty$).
- Essa converge se e solo se la successione delle sue somme parziali n-esime è limitata.

Esaminiamo ora alcune condizioni sufficienti per la convergenza.

Criterio del confronto

Proposizione

Siano $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini non negativi tali che*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \textit{definitivamente.}$$

Allora

$$\sum b_n \textit{ convergente} \Rightarrow \sum a_n \textit{ convergente;}$$

$$\sum a_n \textit{ divergente} \Rightarrow \sum b_n \textit{ divergente.}$$

La serie $\sum b_n$ si chiama maggiorante, la serie $\sum a_n$ si chiama minorante.

Criterio del confronto asintotico

Proposizione

Se due successioni $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *di numeri reali positivi sono asintotiche*

$$a_n \sim b_n$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *hanno lo stesso carattere, cioè o sono entrambe convergenti o sono entrambe divergenti.*

Criterio della radice

Proposizione

Sia $\sum a_n$ *serie a termini non negativi. Se esiste il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

allora

- *se* $l < 1$ *la serie converge;*
- *se* $l > 1$ *la serie diverge;*
- *se* $l = 1$ *nulla si può concludere.*

Criterio del rapporto

Proposizione

Sia $\sum a_n$ *serie a termini non negativi. Se esiste il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

allora

- *se* $l < 1$ *la serie converge;*
- *se* $l > 1$ *la serie diverge;*
- *se* $l = 1$ *nulla si può concludere.*

Serie assolutamente convergenti

Definizione

Una serie di $\sum a_n$ *si dice* *assolutamente convergente* *se la serie (a termini non negativi)* $\sum |a_n|$ *converge.*

Teorema

Se una serie è assolutamente convergente allora è convergente.

- Se una serie è a termini positivi la definizione di convergenza assoluta coincide con quella di convergenza.
- Se una serie è convergente non è detto che sia assolutamente convergente.

Serie a termini di segno alternato

Definizione

Una serie si dice a termini di segno alternato se è del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

ove $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali tali che $a_n \geq 0$ per ogni n.

Criterio di Leibniz

Teorema

Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

Se $\{a_n\}$ *è una successione di numeri reali tali che*

- $a_n \geq 0$ *per ogni* n*;*
- $\{a_n\}$ *è decrescente;*
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*;*

allora la serie è convergente.

Inoltre

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_n.$$