Esercizi risolti sulle derivate in R^2

Giorgio Ghisotti

Contenuti

Descrizione contenuti

Indice

1 Dal libro di teoria **2**
1.1 Esercizio 3.5.1 - i . . . 2
1.2 Esercizio 3.5.1 - ii . . . 2
1.3 Esercizio 3.5.1 - iv *(si, ne ho saltato uno)* . . . 2
1.4 Esercizio 3.5.2 - i . . . 3
1.5 Esercizio 3.5.2 - ii . . . 3
1.6 Esercizio 3.5.2 - iii . . . 3
1.7 Esercizio 3.5.6 - i . . . 4
1.8 Esercizio 3.5.6 - ii . . . 4
1.9 Esercizio 3.5.6 - iii . . . 4
1.10 Esercizio 3.5.8 - i . . . 5

1 Dal libro di teoria

1.1 Esercizio 3.5.1 - i

Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y) = (x^2 - y)e^{xy-2}$ ***rispetto al versore*** $\nu = (cos(\theta), sin(\theta))$ ***con*** $\theta \in [0, 2\pi)$ ***nel punto*** $P = (1, 0)$

Soluzione:
Per trovare le derivate parziali lungo x e y sostituiamo a turno x con $x_p = 1$ e y con $y_p = 0$

$$\frac{\delta f(1,0)}{\delta x} = \frac{d(x^2 - y_p)e^{xy_p-2}}{dx} = \frac{d(x^2e^{-2})}{dx} = 2xe^{-2} \tag{1.1}$$

che in $(1, 0)$ è uguale a $2e^{-2}$ mentre

$$\frac{\delta f(1,0)}{\delta y} = \frac{d(x_p - y)e^{x_py-2}}{dy} = \frac{d(1 - y)e^{y-2}}{dy} = -ye^{y-2} \tag{1.2}$$

che in $(1, 0)$ è uguale a 0.

Per trovare la risposta finale occorre fare il prodotto scalare tra $< \frac{\delta f(1,0)}{\delta x}, \frac{\delta f(1,0)}{\delta y} >$ e $< cos(\theta), sin(\theta) >$, ovvero

$$2e^{-2}cos(\theta) \tag{1.3}$$

1.2 Esercizio 3.5.1 - ii

Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y) = xylog(x^2 + y^2)$ ***rispetto al versore*** $\nu = (cos(\theta), sin(\theta))$ ***con*** $\theta \in [0, 2\pi)$ ***nel punto*** $P = (0, 1)$

Soluzione:
Per i dettagli vedi *3.5.1 - i*

$$g(x) = \frac{\delta f(0,1)}{\delta x} = \frac{dxy_plog(x^2 + y_p^2)}{dx} = \frac{dxlog(x^2 + 1)}{dx} = log(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \tag{1.4}$$

$$h(y) = \frac{\delta f(0,1)}{\delta y} = 0 \tag{1.5}$$

$$< (g(0), h(1)), (cos(\theta), sin(\theta)) >=< (0, 0), (cos(\theta), sin(\theta)) >= 0 \tag{1.6}$$

1.3 Esercizio 3.5.1 - iv *(si, ne ho saltato uno)*

Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y) = xy^2arctan(x^2y)$ ***rispetto al versore*** $\nu = (cos(\theta), sin(\theta))$ ***con*** $\theta \in [0, 2\pi)$ ***nel punto*** $P = (1, 1)$

Soluzione:
Per i dettagli vedi *3.5.1 - i*

$$g(x) = \frac{\delta f(1,1)}{\delta x} = \frac{dxy_p^2arctan(x^2y_p)}{dx} = \frac{dxarctan(x^2)}{dx} = arctan(x^2) + \frac{2x^2}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{4} + 1 \tag{1.7}$$

© 2016 Giorgio Ghisotti <O>

$$h(y) = \frac{\delta f(1,1)}{\delta y} = \frac{dx_p y^2 arctan(x_p^2 y)}{dy} = \frac{dy^2 arctan(y)}{dy} = 2yarctan(y) + \frac{y^2}{y^2+1} = \frac{\pi+1}{2} \quad (1.8)$$

$$< (g(1), h(1)), (cos(\theta), sin(\theta)) >= (\frac{\pi}{4} + 1)cos(\theta) + (\frac{\pi+1}{2})sin(\theta) \quad (1.9)$$

1.4 Esercizio 3.5.2 - i

Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = \frac{log(x^2+y^2)}{x}$ ***e specificare dove ha senso calcolarle***

Soluzione:
Ovviamente non ha senso calcolare la derivata in tutti i punti dove x=0. Negli altri punti $P = (x_p, y_p)$:

$$\frac{\delta f(x_p, y_p)}{\delta x} = \frac{d\frac{log(x^2+y_p^2)}{x}}{dx} = \frac{\frac{2x^2}{x^2+y_p^2} - log(x^2+y_p^2)}{x^2} = \frac{2}{x^2+y_p^2} - \frac{log(x^2+y_p^2)}{x^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{\delta f(x_p.y_p)}{\delta y} = \frac{d\frac{log(x_p^2+y^2)}{x_p}}{dy} = \frac{2y}{x_p y^2 + x_p^3} \quad (1.11)$$

1.5 Esercizio 3.5.2 - ii

Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = sin(\frac{x}{y}) + cos(\frac{y}{x})$ ***e specificare dove ha senso calcolarle***

Soluzione:
Non ha senso calcolare le derivate nei punti in cui $x = 0$ o $y = 0$. Negli altri punti $P = (x_p, y_p)$:

$$\frac{\delta f(x_p, y_p)}{\delta x} = \frac{d(sin(\frac{x}{y_p}) + cos(\frac{y_p}{x}))}{dx} = \frac{cos(\frac{x}{y_p})}{y_p} + \frac{y_p sin(\frac{y_p}{x})}{x^2} \quad (1.12)$$

$$\frac{\delta f(x_p, y_p)}{\delta y} = \frac{d(sin(\frac{x_p}{y}) + cos(\frac{y}{x_p}))}{dy} = \frac{-x_p cos(\frac{x_p}{y})}{y^2} - \frac{sin(\frac{y}{x_p})}{x_p} \quad (1.13)$$

1.6 Esercizio 3.5.2 - iii

Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = ye^{-x^2}$ ***e specificare dove ha senso calcolarle***

Soluzione:
Ha senso calcolare le derivate su tutto R^2, qundi in un qualsiasi punto $P = (x_p, y_p)$

$$\frac{\delta f(x_p, y_p)}{\delta x} = \frac{dy_p e^{-x^2}}{dx} = -2xy_p e^{-x^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{\delta f(x_p, y_p)}{\delta y} = \frac{dye^{-x_p^2}}{dy} = e^{-x_p^2} \quad (1.15)$$

1.7 Esercizio 3.5.6 - i

Calcolare l'equazione del piano tangente alla funzione $f(x,y) = (x^2 - y)e^{xy-2}$ ***nel punto*** $P = (1,0)$

Soluzione:
Prima di tutto occorre trovare il gradiente della funzione in quel punto:

$$\frac{\delta f(1,0)}{\delta x} = \frac{d(x^2)e^{-2}}{dx} = 2e^{-2}(x - x^2) \to 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\delta f(1,0)}{\delta y} = \frac{d(1-y)e^{y-2}}{dy} = (1-y)e^{y-2} \to e^{-2} \tag{1.17}$$

$$\nabla f(1,0) = (0, e^{-2}) \tag{1.18}$$

Il piano tangente t e' dato da:

$$z =< \nabla f(1,0), (x-1, y) > + f(1,0) = ye^{-2} + \frac{1}{e} \tag{1.19}$$

1.8 Esercizio 3.5.6 - ii

Calcolare l'equazione del piano tangente alla funzione $f(x,y) = log(x + y^2 + 1)$ ***nel punto*** $P = (0,0)$

Soluzione:

$$\frac{\delta f(0,0)}{\delta x} = \frac{dlog(x+1)}{dx} = \frac{1}{x+1} \to 1 \tag{1.20}$$

$$\frac{\delta f(0,0)}{\delta y} = \frac{dlog(y^2+1)}{dy} = \frac{2y}{y^2+1} \to 0 \tag{1.21}$$

$$\nabla f(0,0) = (1,0) \tag{1.22}$$

$$z =< (1,0), (x,y) >= x \tag{1.23}$$

1.9 Esercizio 3.5.6 - iii

Calcolare l'equazione del piano tangente alla funzione $f(x,y) = xylog(x^2 + y^2)$ ***nel punto*** $P = (0,1)$

Soluzione:

$$\frac{\delta f(0,1)}{\delta x} = \frac{dxlog(x^2+1)}{dz} = log(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \to 1 \tag{1.24}$$

$$\frac{\delta f(0,1)}{\delta y} = \frac{d0}{dy} = 0 \tag{1.25}$$

$$\nabla f(0,1) = (1,0) \tag{1.26}$$

$$z =< (1,0), (x, y-1) > + f(0,1) = x \tag{1.27}$$

1.10 Esercizio 3.5.8 - i

Trovare i punti stazionari e gli estremi superiore e inferiore della funzione $f(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 - 12y + 12$

Soluzione:
Basta trovare il gradiente in (x, y) **e trovare i punti in cui e' uguale a zero per ricavare i punti stazionari**

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 2x - 2 \tag{1.28}$$

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 6y - 12 \tag{1.29}$$

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 6y - 2) \tag{1.30}$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 6y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

© 2016 Giorgio Ghisotti <O>