Esercizi risolti sulle equazioni differenziali

Giorgio Ghisotti

Contenuti

Descrizione contenuti

Indice

1 Dal libro di teoria **2**
1.1 Esercizio 4.5.1 - i . . . 2
1.2 Esercizio 4.5.1 - ii . . . 2
1.3 Esercizio 4.5.1 - iii . . . 3
1.4 Esercizio 4.5.1 - iv . . . 3
1.5 Esercizio 4.5.1 - v . . . 3
1.6 Esercizio 4.5.1 - vi . . . 4
1.7 Esercizio 4.5.2 - i . . . 4
1.8 Esercizio 4.5.2 - ii . . . 4

2 Dalle esercitazioni **5**
2.1 14/12 - 1 . . . 5
2.2 14/12 - 2 . . . 5

1 Dal libro di teoria

1.1 Esercizio 4.5.1 - i

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = 3y - cos(x)$

Soluzione:
Intanto mettiamola in una forma più comoda -> $3y - y' = cos(x)$ e troviamo la soluzione dell'equazione omogenea associata $3y - y' = 0$:

$$3e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0 \tag{1.1}$$
$$3 - \lambda = 0 \tag{1.2}$$
$$\lambda = 3 \tag{1.3}$$

$$y = c_1 e^{3x} \tag{1.4}$$

mentre come equazione di prova usiamo

$$\phi(x) = acos(x) + bsin(x) \tag{1.5}$$

$$\phi'(x) = -asin(x) + bcos(x) \tag{1.6}$$

e quindi

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 3b - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{10} \\ a = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Di conseguenza l'integrale generale completo è

$$y = c_1 e^{3x} + \frac{3}{10}cos(x) + \frac{1}{10}sin(x) \tag{1.7}$$

1.2 Esercizio 4.5.1 - ii

Trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = 2y/x + log(x)$

Soluzione:
Questa è un'equazione del tipo $y' = a(x)y + b(x)$ e si risolve trasformandola nella forma $y'e^{-A(x)} = a(x)ye^{-A(x)} + b(x)e^{-A(x)}$ che si semplifica in $(ye^{-A(x)})' = b(x)e^{-A(x)}$:

$$(ye^{-2log(x)})' = log(x)e^{-2log(x)} \tag{1.8}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{log(x)}{x^2} dx \tag{1.9}$$

$$\frac{y}{x^2} = -\frac{log(x)}{x} - \frac{1}{x} + c \tag{1.10}$$

$$y = -x(log(x) + 1) + cx^2 \tag{1.11}$$

© 2016 Giorgio Ghisotti <O>

1.3 Esercizio 4.5.1 - iii

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $x^2y' = -2y - 3$

Soluzione:
Si può procedere come nell'esercizio precedente (dato che l'equazione è dello stesso tipo)

$$y' = \frac{-2y}{x^2} - \frac{3}{x^2} \tag{1.12}$$

$$(ye^{\frac{-2}{x}})' = \frac{-3e^{\frac{-2}{x}}}{x^2} \tag{1.13}$$

$$ye^{\frac{-2}{x}} = \int \frac{-3e^{\frac{-2}{x}}}{x^2}dx = \int \frac{-3}{2}(\frac{2e^{\frac{-2}{x}}}{x^2})dx = \frac{-3e^{\frac{-2}{x}}}{2} + c \tag{1.14}$$

$$y = \frac{-3}{2} + ce^{\frac{2}{x}} \tag{1.15}$$

1.4 Esercizio 4.5.1 - iv

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = e^{-2x} - \frac{y}{x}$

Soluzione:
Anche questa è del tipo $y' = a(x)y + b(x)$, quindi:

$$(ye^{log(x)})' = e^{-2xlog(x)} = xe^{-2x} \tag{1.16}$$

$$yx = \int e^{-2xlog(x)} = \int xe^{-2x}dx = \frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c \tag{1.17}$$

$$y = \frac{-e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4x} + \frac{c}{x} \tag{1.18}$$

1.5 Esercizio 4.5.1 - v

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = ylog(x) + x^x$

Soluzione:
Questa è piu' semplice di quanto sembri:

$$-\int log(x)dx = -xlog(x) + x \tag{1.19}$$

$$(ye^{-xlog(x)+x})' = e^{xlog(x)}e^{-xlog(x)+x} = e^x \tag{1.20}$$

$$ye^{-xlog(x)+x} = \int e^x dx = e^x + c \tag{1.21}$$

$$y = e^{xlog(x)} + ce^{xlog(x)-x} = x^x + cx^xe^{-x} \tag{1.22}$$

© 2016 Giorgio Ghisotti <O>

1.6 Esercizio 4.5.1 - vi

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = -ycos(x)+sin(x)cos(x)$

Soluzione: Come prima:

$$(ye^{sin(x)})' = sin(x)cos(x)e^{sin(x)} \tag{1.23}$$

$$ye^{sin(x)} = \int sin(x)cos(x)e^{sin(x)}dx = e^{sin(x)}(sin(x) - 1) + c \tag{1.24}$$

$$y = sin(x) + ce^{sin(x)} - 1 \tag{1.25}$$

1.7 Esercizio 4.5.2 - i

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = (x+y)^2-x-y-1$

Soluzione:
Questa è un'equazione di Bernoulli. Si risolve sostituendo (x+y) con una funzione z:

$$z' = y' + 1 = (x + y)^2 - x - y = z^2 - z \tag{1.26}$$

$z' = z^2 - z$ è un'equazione differenziale a variabili separabili

$$\frac{dz}{dx} = z^2 - z \tag{1.27}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - z} = \int dx \tag{1.28}$$

$$log(\frac{z-1}{z}) = x + c \tag{1.29}$$

$$z = y + x = \frac{1}{1 + e^{x+c}} \tag{1.30}$$

$$y = \frac{1}{1 + e^{x+c}} - x \tag{1.31}$$

1.8 Esercizio 4.5.2 - ii

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \frac{y}{x}log(\frac{y}{x})$ **(suggerimento: porre** $z = \frac{y}{x}$**)**

Soluzione:
Essendo anche questa un'equazione di Bernoulli, conviene seguire il suggerimento e sostituire $\frac{y}{x}$ con z:

$$z = \frac{y}{x} \rightarrow z' = \frac{xy' - y}{x^2} \rightarrow y' = xz' + z \tag{1.32}$$

$$y' = \frac{y}{x}log(\frac{y}{x}) \rightarrow xz' + z = zlog(z) \rightarrow z' = \frac{z(log(z) - 1)}{x} \tag{1.33}$$

ancora a variabili separabili:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z(log(z)-1)}{x} \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{zlog(z)-z} \tag{1.34}$$

$$log(x) = \int \frac{dz}{zlog(z)-z} = log(log(z-1)) + c = log(clog(z-1)) \tag{1.35}$$

$$x = clog(z-1) \rightarrow z = e^{\frac{x}{c}} + 1 \tag{1.36}$$

$$\frac{y}{x} = e^{\frac{x}{c}} + 1 \tag{1.37}$$

$$y = xe^{\frac{x}{c}} + x \tag{1.38}$$

2 Dalle esercitazioni

2.1 14/12 - 1

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' - sin(x)y = 3sin(x)cos(x)e^{2cos(x)}$

Soluzione:
Questa equazione è nella forma $y' = a(x)y + b(x)$ e si risolve moltiplicando ambo i lati per $e^{-\int a(x)dx}$:

$$(ye^{-cos(x)})' = 3sin(x)cos(x)e^{cos(x)} \tag{2.1}$$

$$ye^{-cos(x)} = \int 3sin(x)cos(x)e^{cos(x)}dx = -3e^{cos(x)} - \int 3sin(x)e^{cos(x)}dx = 3e^{cos(x)}(1-cos(x)) + c \tag{2.2}$$

$$y = 3e^{2cos(x)}(1-cos(x)) + ce^{cos(x)} \tag{2.3}$$

2.2 14/12 - 2

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = -3y + 3x^2 - 7x + 2$

Soluzione:
Questa è a coefficienti costanti, quindi si risolve trovando prima l'integrale generale dell'equazione omogenea:

$$3y + y' = 0 \tag{2.4}$$

$$3e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} = 0 \rightarrow 3 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -3 \tag{2.5}$$

$$y = ce^{-3x} \tag{2.6}$$

poi impostiamo le equazioni di prova:

$$\begin{cases} \phi(x) = ax^2 + bx + c \\ \phi'(x) = 2ax + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 3b = -7 \\ 3a = 3 \\ 3c + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -3 \\ a = 1 \\ c = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y = ce^{-3x} + x^2 - 3x + \frac{5}{3} \tag{2.7}$$

© 2016 Giorgio Ghisotti <O>