INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE
ESERCITAZIONI DI ANALISI C 20/01/2010

ESERCIZIO 1

Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = e^{y^2-x^2+2x-1}.$$

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$.

Sia $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \le 0\}$, determinare il massimo e il minimo di f su *K*. Dire per quale motivo essi devono esistere.

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$.

$\max_K f(x,y) = e = f(1,1) = f(1,-1)$ $\min_K f(x,y) = \frac{1}{e} = f(0,0) = f(2,0)$.

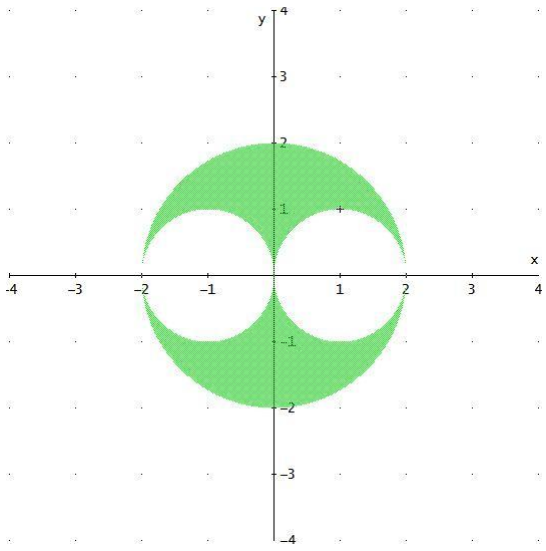
ESERCIZIO 2

Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4, x^2+y^2-2x \ge 0, x^2+y^2+2x \ge 0\}.$$

Si disegni *D* e si calcoli

$$\int_D y dx dy .$$



Si ha per l'insieme $\forall (x,y) \in D, (-x,-y) \in D$
e per la funzione $f(x,y) = -f(x,-y)$
quindi l'integrale è nullo per simmetria.

ESERCIZIO 3

Si determini l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = \sin x + e^{-x}$$

Polinomio caratteristico: $P(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4 = (t+1)(t^2+4)$, con radici -1 e $\pm 2i$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Soluzione particolare dell'equazione completa nella forma: $y_c(x) = axe^{-x} + b\cos x + c\sin x$.

Soluzione generale: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \frac{x}{5}e^{-x} - \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{6}\sin x$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4

Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 2e^x \sin 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico: $P(t) = t^2 - 2t + 2$, con radici $1 \pm i$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Soluzione particolare dell'equazione completa nella forma: $y_c(x) = xe^x (a\cos x + b\sin x)$.

Soluzione generale: $y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) - xe^x \cos x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Problema di Cauchy: $y(x) = e^x \sin x - xe^x \cos x$.

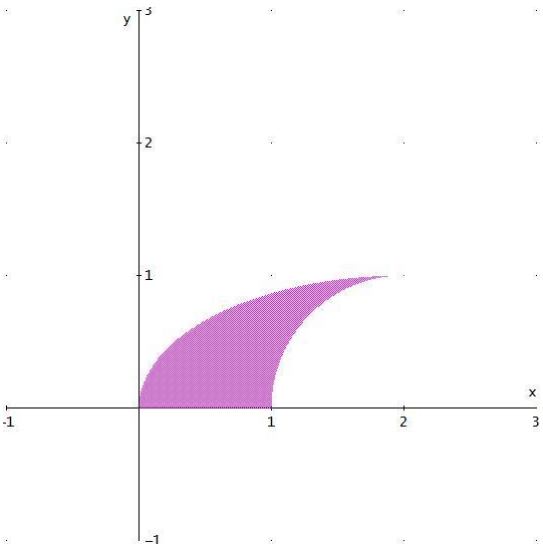
ESERCIZIO 5

Sia

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y, 1 - (x-2)^2 \le y^2 \le 1 - \frac{(x-2)^2}{4} \right\}.$$

Si disegni *D* e si calcoli

$$\int_D ydxdy\,.$$



$$\int_D ydxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}} ydy \right) dx - \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} ydy \right) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO 6

Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 4x^4 + y^4 + 5x^2y^2 - 8x^2 - 5y^2 + 4\,.$$

Si determinino il massimo ed il minimo di f su $\mathbb{R}^2$, l'estremo superiore ed inferiore di f su $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(4x^2 + y^2 - 4\right).$$

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty\,,\ \inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = f\left(0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}.$$