PARABOLA

Forma canonica $y = ax^2$

L'equazione $y = -x^2 - 2x$ descrive una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate. Raccogliendo il coefficiente $a = -1$ ed evidenziando il quadrato del binomio otteniamo $y - 1 = -(x+1)^2$ quindi il vertice è $V = (-1,1)$ e le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $x = 0 \vee x = -2$.

$x = \frac{1}{2}y^2 + y$ è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse. Raccogliendo il coefficiente $a = \frac{1}{2}$ ed evidenziando il quadrato del binomio otteniamo $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y+1)^2$ quindi il vertice è $V = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ e le intersezioni con l'asse delle ordinate sono $y = 0 \vee y = -2$.

ELLISSE

Forma canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ è l'equazione dell'ellisse di centro l'origine e semiassi 2 e $\sqrt{2}$.

L'equazione $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$ descrive ancora un'ellisse. Mettiamo in evidenza i quadrati di binomio $4(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 - 2x + 1) - 36 = 0$ e riconosciamo la forma equivalente $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, quindi il centro è $(1,-1)$ e i semiassi sono 3 e 2.

IPERBOLE

Forma canonica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

L'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = \pm 2$ e ha per asintoti le rette $y = \pm\frac{x}{2}$.

L'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$ interseca l'asse delle ordinate nei punti $y=\pm 3$ e ha per asintoti le rette $y=\pm\frac{3}{2}x$.

L'iperbole di equazione $y=\frac{2}{x}$ è un'iperbole equilatera che ha per asintoti gli assi cartesiani, con centro nell'origine.

Anche l'equazione $y=\frac{x+1}{x-1}$ descrive un'iperbole equilatera di centro $(1,1)$ e asintoti $x=1$ e $y=1$.

RETTE INCIDENTI

Forma canonica: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

L'equazione $x^2-3y^2=0$ descrive le rette $y=\pm\frac{x}{\sqrt{3}}$.

L'equazione $4x^2-y^2+4x+2y=0$ una volta riscritta nella forma $(2x+1)^2-(y-1)^2=0$ permette di identificare le rette $2x-y+2=0$ e $2x+y=0$.

DEFINIZIONI

- Si dice palla o cerchio di centro $(x_0,y_0)$ e raggio $r$ l'insieme così definito:
  $B(x_0,y_0;r)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r\right\}$
- Un insieme $A\subseteq\mathbb{R}^2$ è detto intorno di $P_0=(x_0,y_0)$ se esiste $r>0$ tale che $B(x_0,y_0;r)\subset A$.
- Un punto $(x_0,y_0)\in A$ è detto punto interno di $A$ se $A$ è un intorno di $(x_0,y_0)$.
- Un punto $(x_0,y_0)$ è detto punto di frontiera per $A$ se per ogni $r>0$ si ha $B(x_0,y_0;r)\cap A\neq\varnothing$ e $B(x_0,y_0;r)\cap(\mathbb{R}^2\setminus A)\neq\varnothing$, cioè se in ogni suo intorno cadono contemporaneamente punti appartenenti ad $A$ e al suo insieme complementare. Un punto di frontiera per un insieme può non appartenere all'insieme stesso. L'insieme di tutti i punti interni e di tutti i punti di frontiera si chiama chiusura di $A$ e si indica con $\overline{A}$.
- Insieme aperto in $\mathbb{R}^2$: $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ si dice aperto se $\forall(x,y)\in\Omega,\ \exists\varepsilon>0: B((x,y);\varepsilon)\subset\Omega$.
- Insieme chiuso in $\mathbb{R}^2$: $C\subset\mathbb{R}^2$ si dice chiuso se $\mathbb{R}^2\setminus C$ è aperto.
- Insieme limitato in $\mathbb{R}^2$: $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ limitato $\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0:\Omega\subset B((0,0);\varepsilon)$.
- Insieme compatto: chiuso e limitato.

SOTTOINSIEMI COMPATTI DEL PIANO

1. Disegnare l'insieme $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3-3x\le y\le x, x\ge 0\right\}$.

L'insieme $K$ è delimitato inferiormente dal grafico della cubica $y=x^3-3x$ e superiormente dalla retta $y=x$, come mostrato nella figura 1. L'insieme può essere scritto come dominio normale rispetto a $x$: $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2, x^3-3x\le y\le x\right\}$

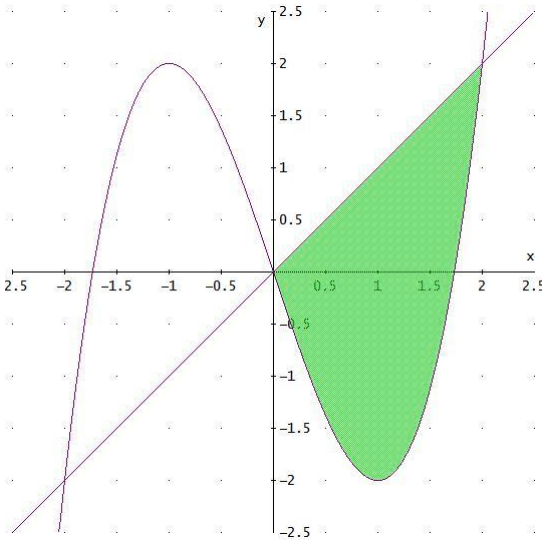


figura 1

2. Disegnare l'insieme $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le \frac{1}{2}x, x^2+y^2-2(x+y)+1\le 0\right\}$.

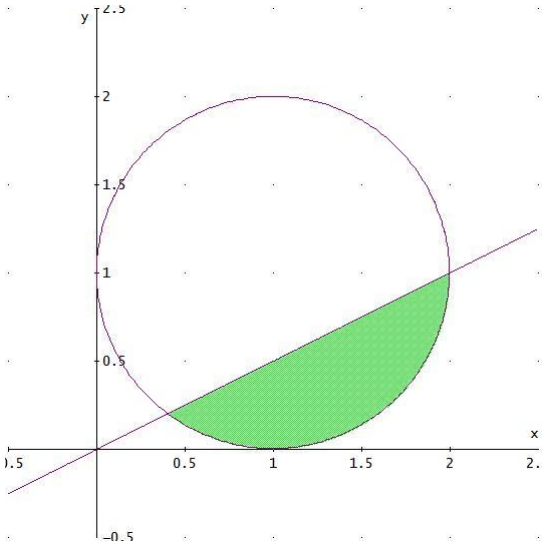


Figura 2

L'insieme $D$ è la parte di cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1 al di sotto della retta $y=\frac{x}{2}$. Può essere scritto come dominio normale rispetto a $x$: $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{2}{5}\le x\le 2, 1-\sqrt{2x-x^2}\le y\le \frac{1}{2}x\right\}$.

COORDINATE POLARI

Può essere utile, talvolta, il passaggio a coordinate polari, soprattutto quando sono presenti circonferenze. Il piano $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sono in corrispondenza biunivoca tramite le equazioni

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

mentre la corrispondenza inversa è stabilita da $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \theta=\arctan\frac{y}{x} \text{ se } x>0 \\ \theta=\pi+\arctan\frac{y}{x} \text{ se } x<0 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \quad \text{se } x=0, y>0 \\ \theta=\frac{3}{2}\pi \quad \text{se } x=0, y<0 \end{cases}$.

Da notare che talvolta si preferisce far variare $\theta$ in $]-\pi,\pi]$.

3. Disegnare l'insieme $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x\le x^2+y^2\le 4x\right\}$.

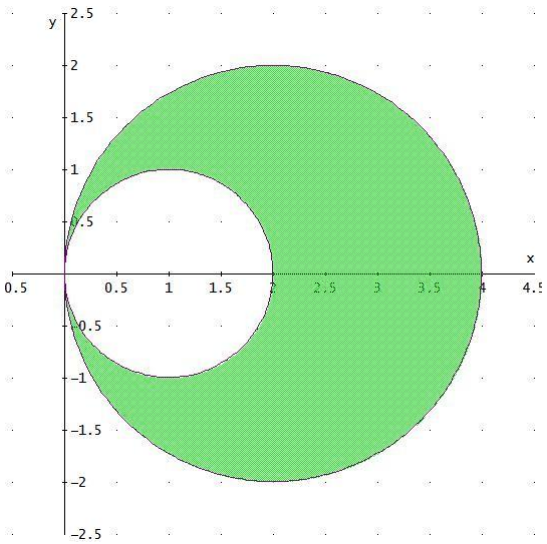


figura 3

L'insieme $D$ è costituito dalla parte compresa fra le due circonferenze eccentriche, rispettivamente di raggi $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ e centri $C_1 = (1,0)$ e $C_2 = (2,0)$, come mostrato in figura 3. Sarebbe complicato scriverlo come dominio normale rispetto a una delle coordinate cartesiane mentre in coordinate polari diventa $D' = \left\{ (\rho,\theta) \,|\, 2\cos\theta \le \rho \le 4\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$

4. Disegnare l'insieme $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1, \sqrt{3}|x| \le y \right\}$

L'insieme $D$ è costituito dalla regione mostrata in figura 4, ed è la porzione di corona circolare di raggi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 1 delimitata dalle rette $y = \pm\sqrt{3}x$.

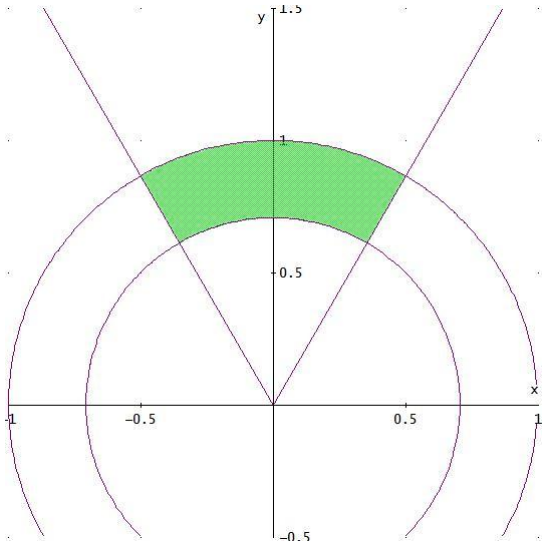


figura 4

In coordinate polari l'insieme è il rettangolo $D' = \left\{ (\rho,\theta) \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \le \rho \le 1, \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{2}{3}\pi \right\}$,

5. Disegnare l'insieme $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2(x+y), x \le \sqrt{3}y \le 3x \right\}$.

L'insieme *E*, delimitato dalle due circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ e dalle due rette $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ e $y = \sqrt{3}x$, è mostrato in figura 5.

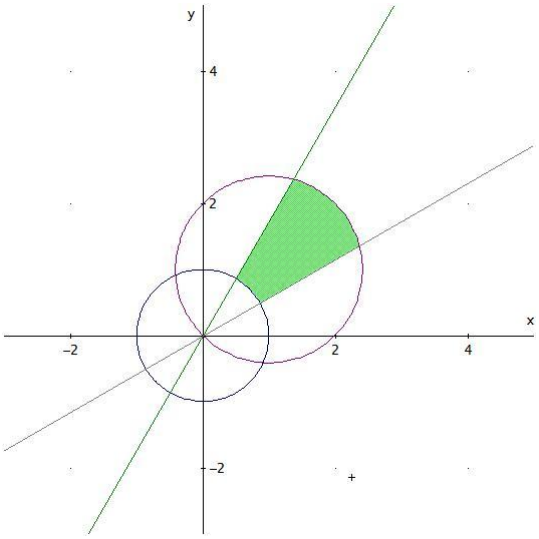


figura 5

In coordinate polari, $E' = \left\{ (\rho, \theta) \,|\, 1 \le \rho \le 2(\cos\theta + \sin\theta), \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\}$.

6. Disegnare l'insieme $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge 0, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x^2, \frac{4}{9} \le x^2 + y^2 \le 2 \right\}$.

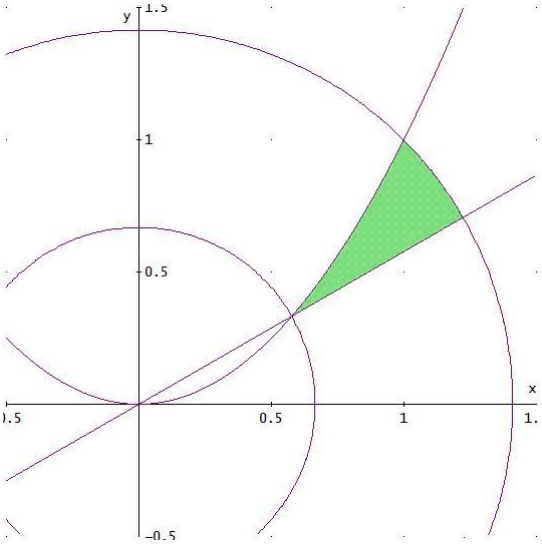


figura 6

L'insieme $K$ è la porzione di corona circolare centrata in $(0,0)$ di raggi $\frac{2}{3}$ e $\sqrt{2}$ e delimitata dalla retta $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ e dalla parabola $y=x^2$ che si intersecano proprio sulla circonferenza interna nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right)$, come mostrato in figura 6.

Passando a coordinate polari abbiamo: $K'=\left\{(\rho,\theta)\,|\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\le\rho\le\sqrt{2},\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

7. Disegnare l'insieme $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,2\le x^2+y^2,0\le y\le -x^2+2x\right\}$

L'insieme è delimitato dall'asse *x*, dalla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ e dalla parabola di vertice $(1,1)$ e apertura $-1$, come mostrato in figura 7.

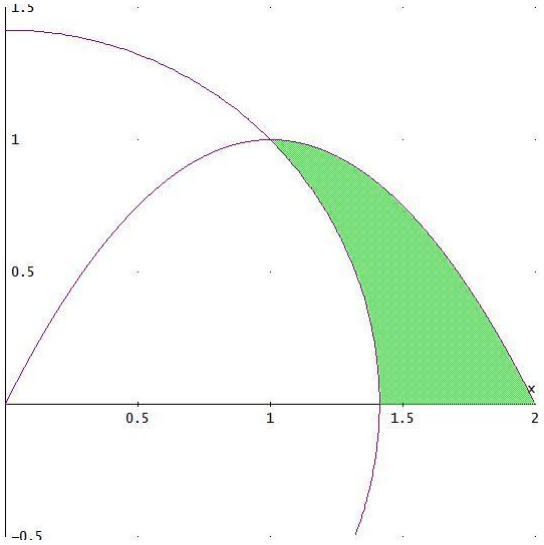


figura 7

Passando a coordinate polari abbiamo $E'=\left\{(x,y)\,|\,\sqrt{2}\le\rho\le\frac{2-\tan\theta}{\cos\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

8. Disegnare l'insieme $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0,x\le y\le 2x,\frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}\right\}$.

L'insieme è delimitato da due rette e due iperboli. I punti di intersezione sono $(1,1)$, $(1,2)$, $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$. L'insieme $\Omega$ è mostrato nella figura 8.

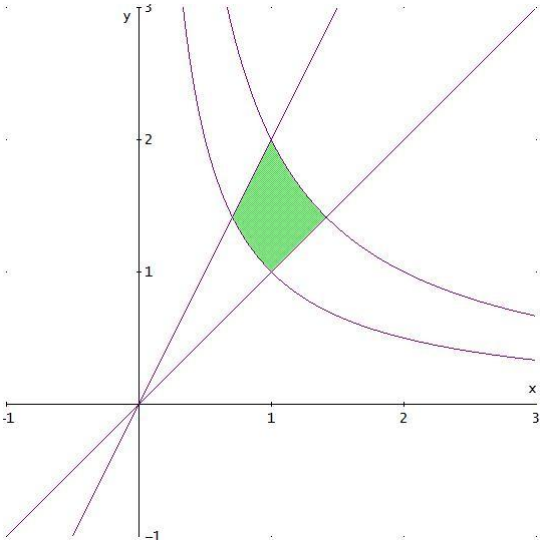


figura 8

9. Disegnare l'insieme $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\le 4,(x+1)^2+y^2\le 4\right\}$.

È l'intersezione delle due circonferenze di raggio 2 aventi centro lungo l'asse delle ascisse nei punti $x=\pm 1$. Può essere scritto come dominio normale rispetto a *y*:

$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3},1-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}-1\right\}$.

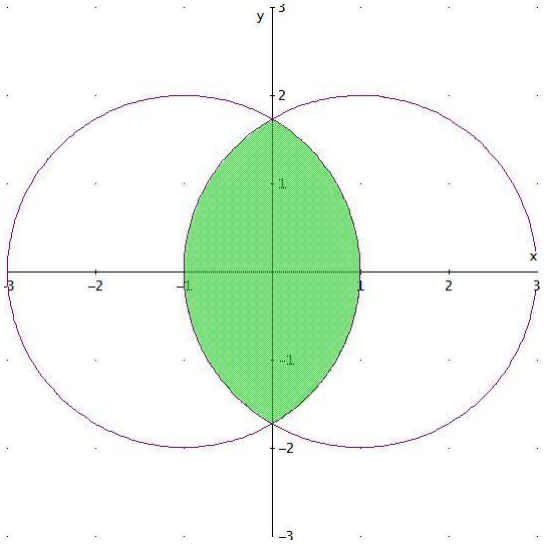


figura 9

10. Disegnare l'insieme $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2x+2y,\frac{y}{2}\le x\le 2y\right\}$.

L'insieme, mostrato in figura 10, si trova nel primo quadrante tra le rette $y = \frac{x}{2}$ e $y = 2x$ all'interno della circonferenza di centro $(1,1)$ e passante per l'origine. In coordinate polari l'insieme risulta $E' = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \le \rho \le 2(\cos\theta + \sin\theta), \arctan\frac{1}{2} \le \theta \le \arctan 2 \right\}$.

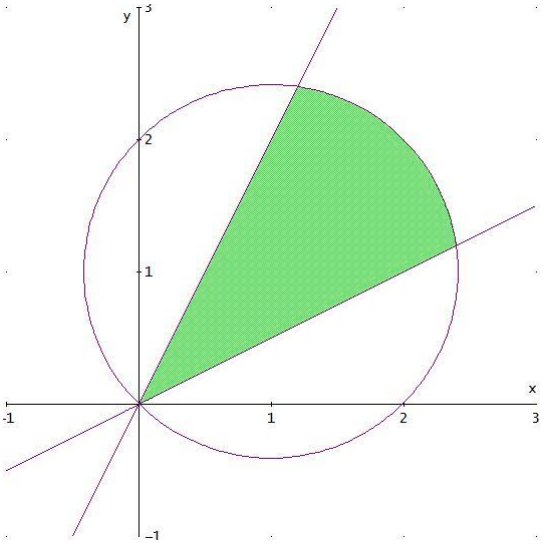


figura 10