TEOREMA DI RIDUZIONE DEGLI INTEGRALI IN DUE DIMENSIONI

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile e $f:\Omega \to \mathbb{R}$ è limitata e continua, valgono le seguenti proprietà:

- se $A \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse *x*, cioè
  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ continue e $\alpha(x) \le \beta(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora la funzione $U(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$ è continua in $[a,b]$ e si ha:
  $\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b U(x)\,dx$.
  Esempio: consideriamo il sottoinsieme del piano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x^2\}$ e la funzione $f(x,y) = y$. Si ha $U(x) = \int_0^{1-x^2} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}$ e l'integrale diventa $\int_A y\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = 2\int_0^1\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = 2\left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$.

- se $B \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse *y*, cioè
  $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$ con $\gamma(y)$ e $\delta(y)$ continue e $\gamma(y) \le \delta(y)$ per ogni $y \in [c,d]$, allora la funzione $V(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx$ è continua in $[c,d]$ e si ha:
  $\int_B f(x,y)\,dxdy = \int_c^d V(y)\,dy$.
  Esempio: consideriamo il sottoinsieme del piano $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}$ e la funzione $f(x,y) = xy$. Si ha $V(y) = \int_0^{y^2} xy\,dx = y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y^2} = \frac{y^5}{2}$ e l'integrale diventa
  $\int_B xy\,dxdy = \int_0^1 \frac{y^5}{2}\,dy = \left[\frac{y^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$.

<u>Osservazione</u>: se l'insieme è normale sia rispetto a *x* che rispetto a *y* valgono entrambe le formule: conviene scegliere quella che rende più facile il calcolo dell'integrale.
Esempio: l'integrale $\int_T e^{y^2}\,dxdy$ con *T* triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(3,1)$ può essere svolto considerando il dominio normale rispetto a *x*, cioè $\int_0^3\left(\int_{\frac{x}{3}}^1 e^{y^2}\,dy\right)dx$, ma non sappiamo scrivere la primitiva di e^{y^2}, oppure considerando il dominio normale rispetto a *y*:
$\int_0^1\left(\int_0^{3y} e^{y^2}\,dx\right)dy = \int_0^1\left[e^{y^2}x\right]_0^{3y}\,dy = \int_0^1 3ye^{y^2}\,dy = \frac{3}{2}\left[e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}(e-1)$

Se inoltre l'insieme è un rettangolo $[a,b]\times[c,d]$ e la funzione è un prodotto di funzioni di una sola variabile $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ allora si ha $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$

1. $\int_E x^2 y dxdy$ sugli insiemi $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 3, 1\le y\le 2\}$
$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0, x\le y\le 2-x^2\}$
$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x}\le y\le 1\}$

Il primo insieme è un rettangolo: $\int_E x^2 y dxdy=\int_0^3 x^2 dx\cdot\int_1^2 y dy=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2=9\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{2}$.

Il secondo insieme è normale rispetto a *x*: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2\}$

$$\int_E x^2 y dxdy=\int_0^1\left(\int_x^{2-x^2} x^2 y dy\right)dx=\int_0^1 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^6-5x^4+4x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^7}{7}-x^5+4\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{5}{21}.$$

Scriviamo il terzo insieme come normale rispetto a *y*: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}$.

$$\int_E x^2 y dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{y^2} x^2 y dx\right)dy=\int_0^1 y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y^2}dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y^7 dy=\frac{1}{3}\left[\frac{y^8}{8}\right]_0^1=\frac{1}{24}$$

2. $\int_E\left(x-3y^2\right)dxdy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$

Sfruttiamo la proprietà addittiva e il fatto che l'insieme è un rettangolo:
$$\int_E\left(x-3y^2\right)dxdy=\int_E x dxdy-3\int_E y^2 dxdy=\int_0^2 x dx\cdot\int_1^2 dy-3\int_0^2 dx\cdot\int_1^2 y^2 dy=$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\cdot 1-3\cdot 2\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2=2-6\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=-12$$

3. $\int_E x^3\sin\left(y^3\right)dxdy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$

L'insieme dato si presenta come normale rispetto a *x*. L'integrale $\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x^3\sin\left(y^3\right)dy\right)dx$ è però impossibile da svolgere perché non conosciamo la primitiva di $\sin\left(y^3\right)$. Se invece invertiamo l'ordine, scrivendo l'insieme come normale rispetto a *y*, cioè $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1, 0\le x\le\sqrt{y}\}$, riusciamo a svolgere il calcolo.

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} x^3\sin\left(y^3\right)dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}\sin y^3\right]_0^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{y^2}{4}\sin y^3dy=\left[-\frac{1}{12}\cos y^3\right]_0^1=\frac{1}{12}(1-\cos 1)$$

TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI IN DUE DIMENSIONI

Siano $\Omega,\Lambda\subseteq\mathbb{R}^2$ due aperti e sia $\Phi:\Omega\to\Lambda$ una funzione biiettiva di classe C^1 e tale che $0<\left|\det J_\Phi(u,v)\right|<+\infty$ per ogni $(u,v)\in\Omega$. Se $f:E\subset\Lambda\to\mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata sull'insieme *E* misurabile, allora $\int_E f(x,y)\,dxdy=\int_{\Phi^{-1}(E)} f\left(\Phi(u,v)\right)\left|\det J_\Phi(u,v)\right|dudv$.

Esempio: consideriamo il sottoinsieme del piano $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$ e la funzione $f(x,y)=2x+y$.

La trasformazione in coordinate polari $\Phi=\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ ci permette di scrivere $\Phi^{-1}(A)=A'=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le\pi\right\}$ e $f(\rho,\theta)=\rho(2\cos\theta+\sin\theta)$, mentre la matrice jacobiana è $J_\Phi=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}$ e quindi $\det J_\Phi=\rho$.

Perciò $\int_A(2x+y)\,dxdy=\int_{A'}\rho(2\cos\theta+\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta$.

Osserviamo inoltre che l'insieme di integrazione è un rettangolo e la funzione un prodotto di funzioni di una sola variabile, quindi il calcolo dell'integrale si semplifica ulteriormente in:

$$\int_0^1\rho^2d\rho\cdot\int_0^\pi(2\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta=\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\cdot\left[2\sin\theta-\cos\theta\right]_0^\pi=\frac{2}{3}.$$

4. $\int_E e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ con $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -2\le y\le 2, 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\right\}$

Passando a coordinate polari la regione di integrazione diventa il rettangolo $E'=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\le\rho\le 2, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$, la funzione $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=e^\rho$, e con il determinante jacobiano ρ otteniamo:

$$\int_0^2 e^\rho\rho d\rho\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\left[e^\rho(\rho-1)\right]_0^2\cdot\pi=\pi\left(e^2+1\right).$$

5. $\int_E x^2y\,dxdy$ con $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\le 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

L'insieme di integrazione è il semicerchio inferiore di centro $C=(0,0)$ e raggio $R=1$.

In coordinate cartesiane posso sfruttare il fatto che la funzione e la regione sono simmetriche rispetto all'asse *y*: $2\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 x^2 y dy\right)dx = 2\int_0^1 x^2\frac{\left(x^2-1\right)}{2}dx = \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{2}{15}$

Passando a coordinate polari sfruttiamo invece il fatto che la regione diventa il rettangolo $E'=\left\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 1,\pi\le\theta\le 2\pi\right\}$, la funzione si presenta come $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^3\cos^2\theta\sin\theta$, e con il determinante jacobiano ρ otteniamo:

$$\int_0^1\rho^4 d\rho\cdot\int_\pi^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1\cdot\left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{15}.$$

6. Sia dato l'insieme $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\ge 0, 2x^2\le y\le 1+x^2\right\}$. Disegnate *D* e calcolate $\int_D x\sqrt{y}dxdy$

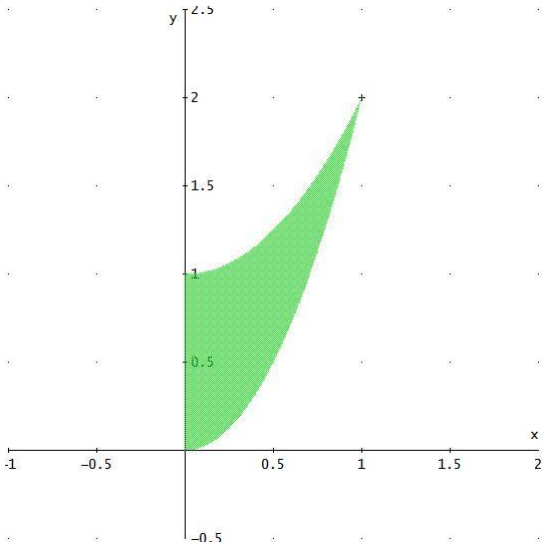

figura 1

L'insieme (figura 1) è dato dalla parte di piano delimitata a sinistra dall'asse *y* **,** sopra dalla parabola $y=1+x^2$ e sotto dalla parabola $y=2x^2$ che si incontrano nel punto $(1,2)$.

La regione di integrazione si può vedere come dominio normale rispetto a *x* sull'intervallo $[0,2]$ e come prima cosa possiamo integrare rispetto a *y* tra $y=2x^2$ e $y=1+x^2$.

$$\int_D x\sqrt{y}dxdy = \int_0^1\left(\int_{2x^2}^{1+x^2} x\sqrt{y}dy\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{2x^2}^{1+x^2}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx - \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{2}{5}\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{15}\left(4\sqrt{2}-1\right) - \frac{4\sqrt{2}}{15} = \frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{2}{15}.$$

7. Sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq \frac{\pi}{2}\left(x^2-2x+1\right), x \leq 1\right\}$. Si calcoli $\int_D (x-1)\sin y dxdy$.

Il dominio di integrazione (figura 2) è situato nel primo quadrante, delimitato dagli assi e dalla parabola con vertice sull'asse delle ascisse di equazione $y = \frac{\pi}{2}(x-1)^2$.

$$\int_D (x-1)\sin y dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}(x-1)^2} (x-1)\sin y dy \right) dx = \int_0^1 (x-1)\left[-\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{2}(x-1)^2} dx =$$

$$= \int_0^1 (x-1)\,dx - \int_{-1}^0 z\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right) dz = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 - \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)}{\pi}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

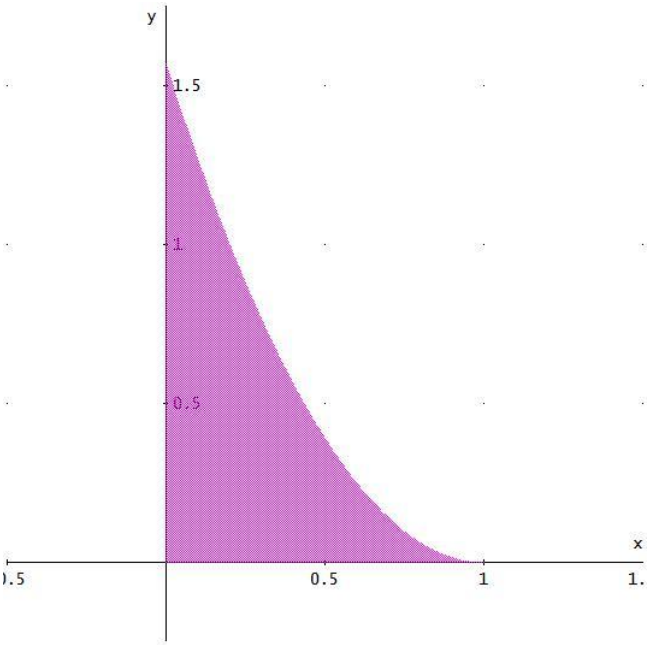

figura 2

8. Sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{2}x, x^2+y^2-2(x+y)+1 \leq 0\right\}$. Si calcoli $\int_D (x-1)\,dxdy$.

Il dominio di integrazione (figura 3) è la parte di cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1 che giace al di sotto della retta $y=\frac{x}{2}$.

$$\int_D (x-1)\,dxdy = \int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}+1}^{\frac{x}{2}}(x-1)\,dy\right)dx = \int_{\frac{2}{5}}^{2}(x-1)\left(\sqrt{1-(x-1)^2}+\frac{x}{2}-1\right)dx = \frac{16}{75}.$$

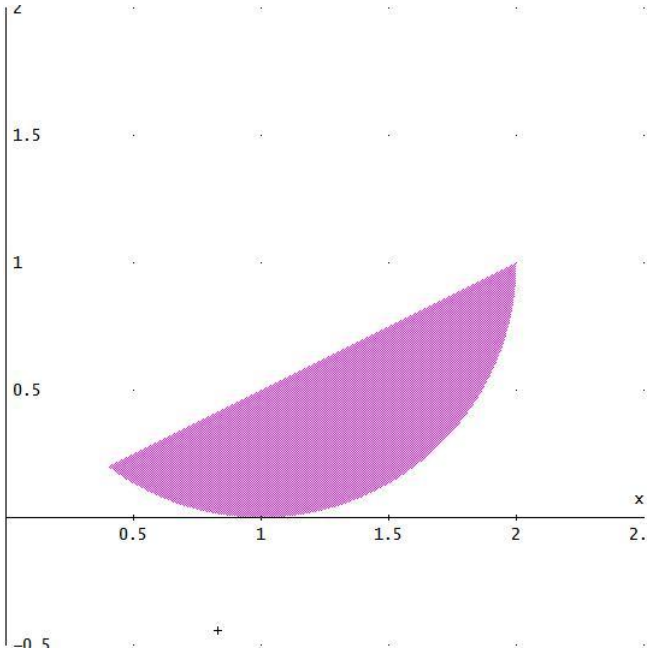

figura 3

9. Si calcoli l'integrale $\int_D xdxdy$ dove $D=\{(x,y)\,|\,2x\le x^2+y^2\le 4x\}$.

La regione di integrazione è rappresentato dalla parte compresa fra le due circonferenze eccentriche, rispettivamente di raggi $r_1=1$ e $r_2=2$ e centri $C_1=(1,0)$ e $C_2=(2,0)$, come mostrato in figura 4.

Calcoliamo l'integrale come differenza utilizzando due diversi insiemi di integrazione: $\int_D xdxdy=\int_{D_2} xdxdy-\int_{D_1} xdxdy$.

Conviene eseguire un passaggio a coordinate polari di centro $C_1=(1,0)$ per $D_1=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\}$ e $C_2=(2,0)$ per $D_2=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$.

$$\int_{D_2}(2+\rho\cos\theta)\,\rho d\rho d\theta-\int_{D_1}(1+\rho\cos\theta)\,\rho d\rho d\theta=$$

$$=\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}(2+\rho\cos\theta)\,\rho d\theta\right)d\rho-\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(1+\rho\cos\theta)\,\rho d\theta\right)d\rho=$$

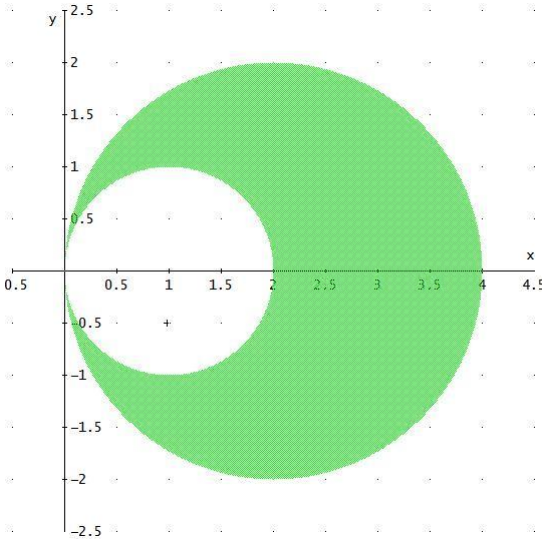

figura 4

$$= 4\pi\int_0^2 \rho d\rho - 2\pi\int_0^1 \rho d\rho = 7\pi.$$

10. $\int_E xydxdy$ $\qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^x \le y \le e, x \ge 0\}.$

Insieme normale rispetto a x (figura 5): $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, e^x \le y \le e\}$

$$\int_0^1 \left(\int_{e^x}^e xydy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{e^x}^e dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^2 x - xe^{2x} \right) dx = \frac{1}{2}\left[e^2 \frac{x^2}{2} - e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8}.$$

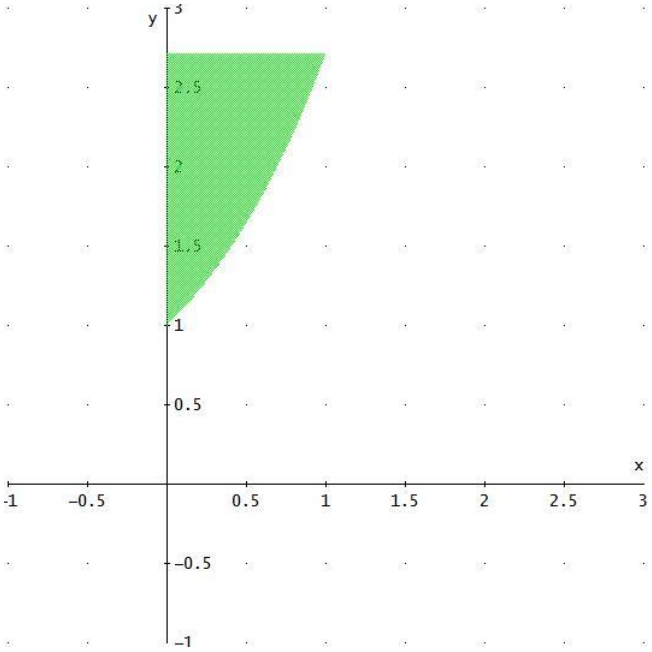

Figura 5