INTEGRALI TRIPLI

Il teorema di riduzione assume due diverse forme in $\mathbb{R}^3$, che però ci riconducono sempre ad integrali in due dimensioni da trattare come già visto precedentemente.

INTEGRAZIONE PER FILI

Si dice che E è un dominio normale rispetto al piano *xy*, se $\Pi_{xy}(E)$ è la proiezione di E sul piano *x y* ed esistono due funzioni continue tali che $\alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)$, cioè se $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Pi_{xy}(E), \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$. Se *E* è un dominio normale rispetto al piano *xy* allora la funzione $B(x,y) = \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ è continua e $\int_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\Pi_{xy}(E)} B(x,y)\,dxdy$.

Esempio: $\int_E z\,dxdydz$ con $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1\right\}$. In questo caso la proiezione di *E* sul piano *xy* è il cerchio di centro l'origine e raggio 1, $\Pi_{xy}(E) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\right\}$, mentre la variabile *z* è limitata da $\alpha(x,y) = 0$ e da $\beta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Abbiamo perciò

$B(x,y) = \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{2}$ e così l'integrale triplo su *E* diventa l'integrale doppio su $\Pi_{xy}(E)$ che calcoliamo con la tecnica, già vista, del passaggio a coordinate polari:

$$\int_E z\,dxdydz = \int_{\Pi_{xy}(E)} \frac{x^2+y^2}{2}\,dxdy = \int_{\Pi_{xy}(E)} \frac{\rho^2}{2}\,\rho d\rho d\theta = \int_0^1 \frac{\rho^3}{2}\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^4}{8}\right]_0^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

INTEGRAZIONE PER STRATI

Si dice che *E* è un insieme semplice rispetto all'asse *z*, se esiste un intervallo chiuso e limitato $I = [a,b]$ e una famiglia $\{E_z\}_{z \in I}$ di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$, ottenuti intersecando *E* con i piani $z = z_0$ per ogni $z_0 \in I$. Se *E* è un insieme semplice rispetto a *z* allora la funzione $U(z) = \int_{E_z} f(x,y,z)\,dxdy$ è continua e $\int_E f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b U(z)\,dz$.

Esempio: lo stesso integrale appena visto può servire a mostrare la tecnica di integrazione per strati. Abbiamo infatti $0 \le z \le 1$ e le sezioni $E_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \le x^2+y^2 \le 1\right\}$ sono corone circolari. Riscrivendo sia la funzione che le sezioni in coordinate polari nel piano, abbiamo $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) = z$ e $E_z = \left\{(\rho,\theta) \mid z \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$, quindi :

$$U(z) = \int_{E_z} z\rho d\rho d\theta = z\int_z^1 \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = z\frac{(1-z^2)}{2} \cdot 2\pi = \pi(z - z^3).$$

Allora si ha: $\int_E z\,dxdydz = \int_0^1 \pi\left(z - z^3\right)dz = \pi\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

ESERCIZI

1. Calcolare $\int_E xye^{xz}\,dxdydz$ con $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 3, 0 \le z \le 1\right\}$

   Questo tipo di dominio è il più semplice possibile: si tratta di un parallelepipedo. Il calcolo dell'integrale triplo si riconduce al calcolo di tre integrali semplici.

   $$\int_E xye^{xz}\,dxdydz = \int_0^2\left(\int_1^3\left(\int_0^1 yxe^{xz}\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_1^3\left[ye^{xz}\right]_0^1 dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_1^3 y\left(e^x - 1\right)dy\right)dx =$$

   $$= \int_0^2\left(e^x - 1\right)\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 dx = 4\int_0^2\left(e^x - 1\right)dx = 4\left[e^x - x\right]_0^2 = 4\left(e^2 - 3\right).$$

2. Calcolare il volume di $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - y\right\}$ e l'integrale $\int_E x\,dxdydz$

   Il volume può essere visto come integrale della funzione $f(x,y) = 1 - y$ sull'insieme $\Pi_{xy}(E)$.

   La proiezione di *E* sul piano *xy* è $\Pi_{xy}(E) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\right\}$.

   $$V_E = \int_E dxdydz = \int_{\Pi_{xy(E)}} (1-y)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 (1-y)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

   L'integrale assegnato, invece, può essere calcolato per fili:

   $$\int_E x\,dxdydz = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1\left(\int_0^{1-y} x\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 (x - xy)\,dy\right)dx =$$

   $$= \int_0^1\left(x - x\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2} - x\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{60}.$$

3. Sia $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right)(z+1) \le 1, 0 \le z \le 1\right\}$. Si disegni *D* e si calcoli

   $$\int_D \frac{z}{1+z}\,dxdydz.$$

   Conviene passare a coordinate cilindriche di asse *z* centrate nel punto $(1,0,0)$.

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Con questa trasformazione abbiamo $D' = \left\{(\rho,\theta,z) \mid 0 \le \rho \le \sqrt{\frac{1}{1+z}}, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 1\right\}$. Si tratta di un solido ottenuto dalla rotazione attorno ad un asse parallelo all'asse *z* passante per il punto $(1,0)$ della funzione $z = \frac{1}{\rho^2} - 1$

La funzione integranda rimane identica, il determinante jacobiano vale ρ e l'integrale da calcolare diventa

$$\int_D \frac{z}{1+z}\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{D_z} \frac{z}{z+1}\rho\,d\rho\,d\theta \right) dz$$

dove $D_z = \left\{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le \sqrt{\frac{1}{1+z}}, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$.

Dato che $\int_{D_z} \rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{z+1}}} \rho\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \pi\frac{1}{1+z}$ dobbiamo calcolare

$$\pi\int_0^1 \frac{z}{(1+z)^2}\,dz = \pi\left[\log(1+z) + \frac{1}{1+z}\right]_0^1 = \pi\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right).$$

4. Considerate l'insieme $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2, z \ge 1, x \ge 0\right\}$. Disegnate *E* e calcolate l'integrale $\int_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$

Si tratta della metà situata dalla parte delle *x* positive di un tronco di cono, il cono di vertice $(0,0,0)$ con apertura $\frac{1}{2}$ tagliato dai due piani $z = 1$ e $z = 2$.

Il dominio è semplice rispetto a *z*: infatti $1 \le z \le 2$ e le sezioni dell'insieme *E* con i piani perpendicolari a *z* sono $E_z = \left\{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le 2z, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}, z \in [1,2]$, perciò possiamo integrare per strati. Per ogni strato $U(z) = \int_{E_z} \rho^2\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2z} \rho^2\,d\rho \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{8}{3}\pi z^3$ e l'integrale diventa

$$\int_E \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_1^2 \left(\int_{E_z} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \right) dz = \int_1^2 U(z)\,dz = \frac{8}{3}\pi \int_1^2 z^3 dz = \frac{8}{3}\pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_1^2 = 10\pi .$$

5. Considerate l'insieme $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 5-\left(x^2+y^2\right), x^2+y^2 \ge 1 \right\}$. Disegnate *E*, calcolate il volume di *E* e l'integrale $\int_E x^2 dxdydz$.

L'insieme *E* è la regione esterna al cilindro $x^2+y^2=1$, delimitata dal piano $z=0$ e dal paraboloide $z=5-\left(x^2+y^2\right)$, che ha vertice in $(0,0,5)$ ed è rivolto verso il basso.

Il calcolo del volume si può fare per strati perché si tratta di un dominio semplice rispetto a *z*: infatti $0 \le z \le 4$ e $E_z = \left\{ (\rho,\theta) \mid 1 \le \rho \le \sqrt{5-z}, 0 \le \theta \le 2\pi \right\}, z \in [0,4]$. Allora

$$U(z) = \int_{E_z} \rho d\rho d\theta = \int_1^{\sqrt{5-z}} \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \pi\left(5-z-1\right) = \pi\left(4-z\right)$$

$$V_E = \int_0^4 \left(\int_{E_z} dxdy \right) dz = \int_0^4 U(z)\,dz = \pi \int_0^4 (4-z)\,dz = \pi \left[4z - \frac{z^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi .$$

L'integrale della funzione assegnata si può calcolare per fili.
$\Pi_{xy} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 5 \right\}$ e $\alpha(x,y)=0$ e $\beta(x,y)=5-\left(x^2+y^2\right)$. Passando a coordinate polari $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) = \rho^2\cos^2\theta$ e $\Pi_{\rho\theta} = \left\{ (\rho,\theta) \mid 1 \le \rho \le \sqrt{5}, 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$, così abbiamo: $\int_E x^2 dxdydz = \int_{\Pi_{xy}} \left(\int_0^{5-\left(x^2+y^2\right)} x^2 dz \right) dxdy = \int_{\Pi_{\rho\theta}} \left(\int_0^{5-\rho^2} \rho^2\cos^2\theta dz \right) \rho d\rho d\theta =$

$$= \int_{\Pi_{\rho\theta}} \rho^2\cos^2\theta\left(5-\rho^2\right)\rho d\rho d\theta = \int_1^{\sqrt{5}} \left(5\rho^3-\rho^5\right) d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta =$$

$$= \left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{\rho^6}{6} \right]_1^{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{28}{3}\pi \ .$$

COORDINATE SFERICHE

Risulta utile talvolta, quando la simmetria della regione di integrazione è sferica, il passaggio alle coordinate sferiche, definito dalla funzione vettoriale

$$\Phi = \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della funzione Φ è

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il determinante jacobiano è $\det J_\Phi(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \sin\varphi$.

6. Calcolare il volume dell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ e l'integrale $\int_E z^2 dxdydz$.

L'insieme *E* è un guscio sferico e il suo volume si calcola in modo elementare come differenza fra i volumi delle due sfere: $V_E = \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right) = \frac{28}{3}\pi$.

Il calcolo dell'integrale assegnato è immediato con la trasformazione in coordinate sferiche, perché la regione *E* diventa il parallelepipedo $E' = \{(\rho,\varphi,\theta) \mid 1 \le \rho \le 2, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Inoltre la funzione da integrare risulta un prodotto di funzioni in una sola variabile e l'integrale quindi si semplifica nel prodotto di tre integrali semplici:

$$\int_E z^2 dxdydz = \int_{E'} \left(\rho^2\cos^2\varphi\right)\left(\rho^2\sin\varphi\right) d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_1^2 \rho^4 d\rho \cdot \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 \cdot \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi \cdot \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{31}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{124}{15}\pi.$$

7. Detto *D* il dominio definito da $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x, 0 \le z \le 2, x^2+y^2+z^2 \ge 1, x^2+y^2-3z^2 \le 0\}$ si calcoli $\int_D x dxdydz$.

Il dominio D è costituito dalla regione, nel semispazio con *x* positiva, delimitata inferiormente dalle superfici della semisfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ e del cono $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, la cui generatrice forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con l'asse di simmetria, e delimitata superiormente dal piano $z = 2$.

Risulta particolarmente indicata la sostituzione con coordinate polari sferiche. In questo modo il dominio *D* diventa $D' = \left\{(\rho,\varphi,\theta) \mid 1 \le \rho \le \frac{2}{\cos\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$, la funzione

$f\left(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi\right)=\rho\sin\varphi\cos\theta$, il determinante jacobiano è $\rho^2\sin\varphi$ e

l'integrale: $\int_D xdxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_1^{\frac{2}{\cos\varphi}}\left(\rho\sin\varphi\cos\theta\right)\left(\rho^2\sin\varphi\right)d\rho\right)d\varphi\right)d\theta=$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\frac{2}{\cos\varphi}}\sin^2\varphi\cos\theta d\varphi\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\frac{2}{\cos\varphi}}\sin^2\varphi\cos\theta d\varphi\right)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(4\frac{\tan^2\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{\sin^2\varphi}{4}\right)d\varphi=\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[4\frac{\tan^3\varphi}{3}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{8}-\frac{\varphi}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{129\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{12}$$

.

8. Considerate l'insieme $E=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\,|\,1\le\left\|\left(x,y,z\right)\right\|\le 2,\frac{1}{\sqrt{3}}\left\|\left(x,y\right)\right\|\le z\le\left\|\left(x,y\right)\right\|\right\}$.

Calcolate la misura di *E* e l'integrale $\int_E\frac{1}{z}dxdydz$.

L'insieme *E* è individuato dal guscio sferico di centro l'origine e raggi 1 e 2, e dai coni le cui rette generatrici formano con l'asse angoli di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ e con vertice in $\left(0,0,0\right)$. Ne risulta un solido di rotazione, una sorta di ciambella che ha per sezione un settore di corona circolare.
Il passaggio a coordinate sferiche ci permette di semplificare molto l'aspetto dell'insieme *E*, che diventa un parallelepipedo.
Infatti $E'=\left\{\left(\rho,\varphi,\theta\right)\,|\,1\le\rho\le 2,\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3},0\le\theta\le 2\pi\right\}$.
Il volume di *E* perciò risulta:

$$V_E=\int_E dxdydz=\int_{E'}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int_1^2\rho^2 d\rho\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=$$

$$=\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2\cdot\left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\left[\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{7}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot 2\pi=\frac{\sqrt{2}-1}{3}7\pi\,.$$

La funzione da integrare ha una forma molto semplice in coordinate sferiche:

$$\int_E\frac{1}{z}dxdydz=\int_{E'}\frac{1}{\rho\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int_1^2\rho d\rho\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=$$

$$=\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2\cdot\left[-\log\left(\cos\varphi\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\left[\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\log 2}{2}\cdot 2\pi=\frac{3\pi\log 2}{2}\,.$$