1. Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{2ye^{y^2}} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Si riscrive $y' = \dfrac{dx}{dy}$ e dopo aver separato le variabili si integrano separatamente le due funzioni.

$$\int 2ye^{y^2}\,dy = \int x\,dx$$

da cui

$$e^{y^2} = \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R} \text{ e } y(x) = -\sqrt{\log\left(\frac{x^2}{2} + c\right)},\ c \in \mathbb{R}.$$

Con la condizione $y(0) = -1$ determiniamo il valore della costante: $c = e$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI CONTINUI

Siano $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue.

Per determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \forall x \in I$$

risolviamo come prima cosa l'equazione omogenea associata

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0, \forall x \in I,$$

che ha come soluzione generale $y_o(x) = ce^{-A(x)}, c \in \mathbb{R}$, dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

Si determina poi una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $y_c = c(x)e^{-A(x)}$ (metodo della variazione delle costanti). La derivata prima di questa funzione è $y_c'(x) = c'(x)e^{-A(x)} - a(x)c(x)e^{-A(x)}$. Sostituendo queste due funzioni nell'equazione otteniamo

$$c'(x)e^{-A(x)} - \cancel{a(x)c(x)e^{-A(x)}} + \cancel{a(x)c(x)e^{-A(x)}} = b(x)$$

da cui $c'(x) = b(x)e^{A(x)}$ e $c(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx$. Dato che questa è solo una delle possibili soluzioni dell'equazione con il termine noto, prende il nome di soluzione particolare.

La soluzione particolare dell'equazione completa viene aggiunta alla soluzione generale dell'equazione omogenea e in definitiva possiamo riassumere l'integrale generale in:

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(c + \int b(x)e^{A(x)}dx\right) \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Sia $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Si calcoli la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y\tan x = \cos^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Applicando la formula vista all'equazione in esame, dato che

$A(x) = \int -\tan x dx = \log(\cos x)$ e $e^{-A(x)} = e^{-\log(\cos x)} = e^{\log\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}$

otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\left(c + \int \cos^3 x dx\right) = \frac{1}{\cos x}\left(c + \frac{\sin x}{3}\left(\cos^2 x + 2\right)\right) \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

La condizione $y(0) = 0$ ci permette di calcolare il valore della costante *c*. Infatti $y(0) = c$ quindi $c = 0$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{1}{3}\tan x\left(\cos^2 x + 2\right)$.

3. Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{1+e^{-x}} y(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una primitiva della funzione $a(x)$ è $A(x) = \int \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \log\left(e^x + 1\right)$

Se non si vuole memorizzare la formula si può procedere anche per passi graduali, scrivendo la soluzione generale dell'equazione omogenea ed aggiungendo a questa una soluzione particolare dell'equazione completa.

Soluzione generale dell'equazione omogenea: $y_o(x) = \frac{c}{e^x+1}$, con $c \in \mathbb{R}$.

Soluzione particolare dell'equazione completa: $y_c(x) = \frac{c(x)}{e^x+1}$ con $y_c'(x) = \frac{c'(x)}{e^x+1} - \frac{e^x c(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$.

Sostituendo nell'equazione completa: $\frac{c'(x)}{e^x+1} - \cancel{\frac{e^x c(x)}{\left(e^x+1\right)^2}} + \cancel{\frac{1}{1+e^{-x}} \frac{c(x)}{e^x+1}} = 2$ da cui

$c'(x) = 2e^x + 2$ e perciò $c(x) = 2e^x + 2x$.

La soluzione generale dell'equazione assegnata è perciò: $y(x) = \frac{2e^x + 2x + c}{e^x+1}$, con $c \in \mathbb{R}$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI COSTANTI

Le funzioni che soddisfano l'equazione omogenea associata ad un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti si ottengono dalle radici polinomio caratteristico associato all'equazione. Sono infatti funzioni esponenziali che hanno come coefficienti dell'esponente le radici $\lambda_i$ del polinomio. La soluzione (integrale) generale di un'equazione di ordine *n* è la combinazione di *n* funzioni linearmente indipendenti e in essa figurano *n* costanti arbitrarie reali.

Eventuali radici reali di molteplicità $m>1$ permettono di trovare *m* funzioni linearmente indipendenti che possono essere riassunte nella forma $y_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{m-1} c_n x^n e^{\lambda x}$ .

Radici complesse coniugate, invece, danno origine a soluzioni esprimibili mediante funzioni goniometriche. Se tra le radici del polinomio caratteristico abbiamo $\lambda=\alpha\pm i\beta$ avremo come soluzioni dell'equazione omogenea $y_\lambda = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right)$.

Anche nel caso delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti l'integrale generale si determina aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea associata un integrale particolare dell'equazione completa. La determinazione della soluzione particolare viene effettuata partendo dalle funzioni che costituiscono il termine noto dell'equazione se si tratta di polinomi, funzioni esponenziali o funzioni trigonometriche.

Nel caso generale, invece, chiamando $f(x)$ il termine noto, si ricorre al metodo della variazione delle costanti, che nel caso di equazioni del secondo ordine porta al sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{\lambda_1 x} + c_2'(x)e^{\lambda_2 x} = 0 \\ \lambda_1 c_1'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 c_2'(x)e^{\lambda_2 x} = f(x) \end{cases}$$

4. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale ordinaria

$$y''+4y = x+\cos x$$

Polinomio caratteristico: $P(t)=t^2+4$ con radici $\pm 2i$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x)=c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ con $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

Dal momento che la somma di funzioni al termine noto si può vedere come un polinomio più una combinazione lineare di funzioni goniometriche, useremo come soluzione particolare dell'equazione completa la funzione: $y_c(x)=a\cos x + b\sin x + cx + d$.

Questa funzione ha come derivate prima e seconda $y'(x)=-a\sin x + b\cos x + c$ e $y''(x)=-a\cos x - b\sin x$.

Sostituendo queste funzioni nell'equazione data abbiamo $-a\cos x - b\sin x + 4a\cos x + 4b\sin x + 4cx + 4d = x + \cos x$, quindi determiniamo i coefficienti dal sistema:

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 3b=0 \\ 4c=1 \\ 4d=0 \end{cases} \rightarrow y_c(x)=\frac{1}{3}\cos x+\frac{x}{4}.$$

L'integrale generale è pertanto $y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x+\frac{x}{4}$ con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria

$$y'''+y''-y'-y=2e^x$$

Polinomio caratteristico: $P(t)=t^3+t^2-t-1=(t-1)(t+1)^2$ con radici 1 e $-1$ doppia.
Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}$ con $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

Dal momento che la funzione a termine noto fa già parte della soluzione generale dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $y_c(x)=axe^x$, con derivate $y_c'(x)=e^x(ax+a)$, $y_c''(x)=e^x(ax+2a)$ e $y_c'''(x)=e^x(ax+3a)$. Sostituendo funzione e derivate nell'equazione di partenza otteniamo $4a=2$ quindi $y_c(x)=\frac{x}{2}e^x$.

L'integrale generale dell'equazione è dunque: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+\frac{x}{2}e^x$ con $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

6. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria

$$y''-3y'+2y=\sin\left(e^{-x}\right)$$

Polinomio caratteristico: $P(t)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$ con radici 1,2.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$ con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Dal momento che la funzione a termine noto è complicata, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $y_c(x)=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{2x}$ con il metodo della variazione delle costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x+c_2'(x)e^{2x}=0 \\ c_1'(x)e^x+2c_2'(x)e^{2x}=\sin\left(e^{-x}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1'(x)=-e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right) \\ c_2'(x)=e^{-2x}\sin\left(e^{-x}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1(x)=-\cos\left(e^{-x}\right) \\ c_2(x)=e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-\sin\left(e^{-x}\right) \end{cases}$$

$$y_c(x)=-\cos\left(e^{-x}\right)e^x+\left(e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-\sin\left(e^{-x}\right)\right)e^{2x}=-e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right).$$

La soluzione generale pertanto è: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}-e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right)$ con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

7. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x} \\ y(1) = y'(1) = e \end{cases}$$

Polinomio caratteristico $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ con radice 1 di molteplicità doppia.
Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dato che il termine noto è non un polinomio né una funzione trigonometrica o esponenziale, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione con il metodo di variazione delle costanti a partire dalla forma $y_c(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ e imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^x(x+1) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -1 \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1(x) = -x \\ c_2(x) = \log x \end{cases} \rightarrow y_c(x) = -xe^x + xe^x \log x$$

La soluzione generale dell'equazione è: $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - xe^x + xe^x \log x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Imponendo le condizioni del problema di Cauchy determiniamo: $y(x) = 2e^x - xe^x + xe^x \log x$.

8. Si calcoli la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \cos 2x + \sin 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico $P(t) = t^3 - 2t^2 + 4t - 8 = (t-2)(t^2+4)$ con radici 2 e $\pm 2i$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 e^{2x}$ con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Le funzioni che costituiscono il termine noto figurano già fra le soluzioni dell'equazione omogenea, perciò cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma
$y_c(x) = ax\cos 2x + bx \sin 2x$, con derivate $y_c'(x) = (2bx + a)\cos 2x + (b - 2ax)\sin 2x$,
$y_c''(x) = (4b - 4ax)\cos 2x + (-4bx - 4a)\sin 2x$ e
$y_c'''(x) = (-8bx - 12a)\cos 2x + (8ax - 12b)\sin 2x$. Sostituendo la funzione e le derivate nell'equazione abbiamo: $\begin{cases} 8a - 8b = 1 \\ -8a - 8b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \rightarrow y_c(x) = -\dfrac{x \sin 2x}{8}$.

Soluzione generale $y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3e^{2x}-\dfrac{x\sin 2x}{8}$ con $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

Imponendo le condizioni del problema di Cauchy abbiamo:

$$\begin{cases} c_1+c_3=0 \\ 2c_2+2c_3=0 \\ -4c_1+4c_3=\dfrac{1}{2} \end{cases}\rightarrow\begin{cases} c_1=-\dfrac{1}{16} \\ c_2=-\dfrac{1}{16} \\ c_3=\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Soluzione del problema di Cauchy: $y(x)=-\dfrac{\cos 2x}{16}-\dfrac{\sin 2x}{16}+\dfrac{e^{2x}}{16}-\dfrac{x\sin 2x}{8}$.

9. Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente equazione differenziale

$$y'''+9y'=x+\cos 3x.$$

Polinomio caratteristico $P(t)=t^3+9t=t\left(t^2+9\right)$ con radici 0 e $\pm 3i$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $y_o(x)=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+c_3$, con $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

Dato che il termine trigonometrico del termine noto figura già nella soluzione dell'equazione omogenea, e nell'omogenea manca la funzione *y*, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma $y_c(x)=ax^2+bx+cx\cos 3x+dx\sin 3x$ con derivate

$y_c'(x)=2ax+b+(3dx+c)\cos 3x+(d-3cx)\sin 3x$,

$y_c''(x)=2a-6c\sin 3x+6d\cos 3x-9cx\cos 3x-9dx\sin 3x$ e

$y_c'''(x)=-27(dx+c)\cos 3x+27(cx-d)\sin 3x$.

Sostituendo la derivata terza e la derivata prima nell'equazione otteniamo:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{18} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{1}{18} \\ d=0 \end{cases}\rightarrow y_c(x)=\frac{x^2}{18}-\frac{x\cos 3x}{18}$$

Soluzione generale dell'equazione: $y(x)=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+c_3+\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{x\cos 3x}{18}$, con $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

10. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y' = x^2 - 2\sin x.$$

Polinomio caratteristico: $P(t) = t^3 + t = t\left(t^2 + 1\right)$ con radici 0, $\pm i$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata:
$y_o(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Soluzione particolare dell'equazione completa: $y_c(x) = ax^3 + bx^2 + cx + dx\cos x + ex\sin x$, con derivate: $y_c'(x) = 3ax^2 + 2bx + c + d\cos x - dx\sin x + e\sin x + ex\cos x$,
$y_c''(x) = 6ax + 2b - 2d\sin x - dx\cos x + 2e\cos x - ex\sin x$ e
$y_c'''(x) = 6a - 3d\cos x + dx\sin x - 3e\sin x - ex\cos x$.

Sommando la derivata prima e la derivata terza ed uguagliando la somma al termine noto, dopo la cancellazione di alcuni termini otteniamo

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = 0 \\ 6a + c = 0 \\ -2d = 0 \\ -2e = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = -2 \\ d = 0 \\ e = 1 \end{cases} \rightarrow y_c(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + x\sin x.$$

La soluzione generale dell'equazione è pertanto:

$$y(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \frac{1}{3}x^3 - 2x + x\sin x, \text{ con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$