SUPERFICI NOTEVOLI

Una qualunque equazione lineare nello spazio $\mathbb{R}^3$ rappresenta un piano. In particolare l'equazione $ax+by+cz=d$ rappresenta il piano perpendicolare al vettore (a,b,c) che interseca gli assi cartesiani nei punti $\left(\frac{d}{a},0,0\right)$, $\left(0,\frac{d}{b},0\right)$ e $\left(0,0,\frac{d}{c}\right)$. Quando $d=0$ il piano passa per l'origine.

Esempio: $2x-y+z=1$ è il piano perpendicolare al vettore $(2,-1,1)$, e interseca gli assi nei punti $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $(0,-1,0)$ e $(0,0,1)$

Una qualunque equazione di secondo grado nello spazio $\mathbb{R}^3$ prende il nome di quadrica. Vediamo alcune quadriche notevoli.

L'equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ rappresenta la superficie della sfera di centro (x_0,y_0,z_0) e raggio *r*.

L'equazione $x^2+y^2+z^2+2x-2y=0$ descrive la superficie sferica di centro $(-1,1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

L'equazione $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ rappresenta la superficie dell'ellissoide di centro (x_0,y_0,z_0) e semiassi (a,b,c).

$\frac{x^2}{4}+y^2+4z^2=1$ è un ellissoide centrato nell'origine con semiassi $\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$.

Gli iperboloidi derivano il loro nome dal fatto che si ottengono per rotazione di un'iperbole. Possono essere a una o a due falde, a seconda che la rotazione avvenga attorno all'asse principale, una falda, o all'asse trasverso, due falde.

L'equazione $x^2+y^2=z^2+1$ è di un iperboloide a una falda, ottenuto dalla rotazione attorno all'asse *z* dell'iperbole $x^2-z^2=1$ (o indifferentemente di $y^2-z^2=1$ sempre attorno all'asse *z*). Le intersezioni di questa superficie con piani ortogonali all'asse *z* risultano tutte circonferenze.

L'iperboloide di equazione $x^2=y^2+z^2+1$ è invece ottenuto per rotazione dell'iperbole $x^2-z^2=1$ attorno all'asse *x* (o indifferentemente di $x^2-y^2=1$ sempre attorno all'asse *x*).

L'iperboloide degenere, il cono, è generato dalla rotazione di una coppia di rette incidenti: la superficie $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=0$ è il doppio cono (sopra e sotto, per intenderci) di asse *z* e di vertice (x_0,y_0,z_0).

Equazioni del tipo $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}+2cz=0$ definiscono superfici dette paraboloidi: le sezioni lungo l'asse z risultano tutte parabole.

L'equazione $z = x^2 + y^2$ definisce un paraboloide di asse z, detto circolare perché le sezioni perpendicolari all'asse z sono circonferenze, e con vertice in $(0,0,0)$, mentre $z = (x-a)^2 + (y-b)^2 + c$ descrive lo stesso paraboloide con il vertice in (a,b,c).
Anche la superficie definita dall'equazione $z = x^2 - y^2$ è detta paraboloide, ma le sezioni perpendicolari all'asse z sono iperboli. La superficie ha la classica forma a sella, e in questo caso il punto sella si trova nell'origine.

Quando le sezioni perpendicolari ad una direzione sono tutte costanti la superficie è detta cilindro. Le equazioni $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + z^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$ descrivono cilindri a sezione circolare di raggio *r* e di assi rispettivamente *z*, *y* e *x*.
Anche $x^2 - y^2 = 1$ e $y = x^2$ sono detti cilindri, anche se le sezioni perpendicolari all'asse in questo caso non sono circonferenze ma, rispettivamente, iperboli e parabole, e quindi vengono indicati come cilindro iperbolico e cilindro parabolico.

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^3$

1. Disegnate l'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \le 1\}$.

   Si tratta dell'ottaedro regolare che interseca gli assi nei punti $(\pm 1,0,0)$ $(0,\pm 1,0)$ e $(0,0,\pm 1)$.
   Curiosità: con la definizione di norma $\|(x,y,z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$ questo insieme è la palla unitaria chiusa $B(0,0,0;1)$, che risulta invece $B(0,0,0;1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ con la definizione $\|(x,y,z)\|_2 = x^2 + y^2 + z^2$ e il cubo $B(0,0,0;1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\}$ con la definizione $\|(x,y,z)\|_\infty = \max\{|x|,|y|,|z|\}$.

2. Disegnate l'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 2x \le y \le x+1, 0 \le z \le x+y\}$.
   Qui abbiamo un solido a base triangolare nel piano $z = 0$ e delimitato al di sopra dal piano $x + y - z = 0$. I vertici nel piano $z = 0$ sono i punti $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,2,0)$ mentre i vertici su piano $x + y - z = 0$ sono $(0,1,1)$ e $(1,2,3)$ e ovviamente ancora l'origine.
   La forma nella quale è stato scritto questo insieme è particolarmente semplice. Infatti per calcolare un integrale in tre dimensioni si deve sempre riuscire a vedere l'insieme di integrazione in modo che $a \le x_1 \le b$ e $\alpha(x_1) \le x_2 \le \beta(x_1)$ e $f(x_1,x_2) \le x_3 \le g(x_1,x_2)$.

3. Disegnate l'insieme $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \ge 0, x + y + z \le 1\}$.
   È un tetraedro situato nel primo ottante, delimitato dai piani $x = 0$ $y = 0$ e $z = 0$, e dal piano $x + y + z = 1$ che interseca gli assi nei punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
   Tagliando il solido con un piano perpendicolare all'asse *z* abbiamo delle sezioni triangolari definite da $T_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1-z, 0 \le y \le 1-x-z\}$ dove *z* è un parametro che varia

nell'intervallo $[0,1]$. Su questa base le condizioni che definiscono questo tetraedro si possono riscrivere come $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z, 0\le y\le 1-x-z\}$.

In analogia a quanto visto in due variabili per semplificare le condizioni che descrivono i vari sottoinsiemi può essere utile ricorrere ad altri sistemi di coordinate.

COORDINATE CILINDRICHE E SFERICHE

Le coordinate polari nel piano danno origine a due analoghi sistemi di coordinate nello spazio: le coordinate cilindriche, definite da

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

e le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

L'angolo θ, soggetto alla limitazione $0\le\theta\le 2\pi$ è, sia nelle coordinate cilindriche che nelle coordinate sferiche, l'angolo che la proiezione di ρ sul piano *xy* forma con il semiasse positivo delle *x*, mentre φ, soggetto alla limitazione $0\le\varphi\le\pi$ è l'angolo che ρ forma con il semiasse positivo *z*. Intuitivo il passaggio alle coordinate cilindriche lungo un altro asse.

4. Disegnate l'insieme $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

   Si tratta di un ottavo di guscio sferico di raggi 1 e 2 contenuto nel primo ottante. L'insieme in coordinate sferiche risulta un parallelepipedo: $E'=\left\{(\rho,\varphi,\theta) \mid 1\le\rho\le 2, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

5. Disegnate l'insieme $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-1)^2+y^2}-2\le z\le 2\right\}$.

   È un cono, aperto verso l'alto con vertice in $(1,0,-2)$, tagliato dal piano $z=2$. Ha quindi altezza 4. Il cono interseca il piano $z=0$ lungo la circonferenza $(x+1)^2+y^2=4$ e il piano $z=2$ lungo la circonferenza $(x-1)^2+y^2=16$. Le coordinate cilindriche qui vanno utilizzate con centro in $(1,0)$, cioè definendo $x=1+\rho\cos\theta$ e $y=\rho\sin\theta$. Abbiamo così: $E'=\{(\rho,\theta,z) \mid 0\le\rho\le 4, 0\le\theta\le 2\pi, \rho-2\le z\le 2\}$.

6. Disegnate l'insieme $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$.

L'insieme è delimitato inferiormente da un cono e superiormente da un paraboloide che si intersecano sul piano $z=1$ lungo la circonferenza $x^2+y^2=1$. L'insieme in coordinate cilindriche è definito da $E'=\left\{(\rho,\theta,z)\mid 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \rho\le z\le 2-\rho^2\right\}$.

7. Disegnate l'insieme $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 5-\left(x^2+y^2\right), x^2+y^2\ge 1\right\}$.
L'insieme è la regione esterna al cilindro $x^2+y^2=1$ delimitata dal piano $z=0$ e dal paraboloide $z=5-\left(x^2+y^2\right)$. La sezione di *E* lungo il piano $z=0$ è la corona circolare $1\le x^2+y^2\le 5$. In coordinate cilindriche abbiamo
$E'=\left\{(\rho,\theta,z)\mid 1\le\rho\le\sqrt{5-z}, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 5\right\}$.

8. Disegnate l'insieme $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2, z\ge 1, x\ge 0\right\}$.

Si tratta della metà situata dalla parte delle *x* positive di un tronco di cono, il cono di vertice $(0,0,0)$ con apertura $\frac{1}{2}$ tagliato dai due piani $z=1$ e $z=2$. In coordinate cilindriche
$E'=\left\{(\rho,\theta,z)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le 2z, 1\le z\le 2\right\}$.

9. Disegnate l'insieme $D=\left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le 2-x-y, x^2\le y\right\}$.
L'insieme è la parte interna del cilindro $y=x^2$ delimitata dai piani $z=0$ e $x+y+z=2$. Il piano $x+y+z=2$ interseca il piano $z=0$ lungo la retta $y=2-x$, che a sua volta interseca la parabola $y=x^2$ nei punti $(1,1,0)$ e $(-2,4,0)$. Leggendo la funzione $f(x,y)=x+y-2$ sopra la parabola $y=x^2$ troviamo che $f\left(x,x^2\right)=x^2-x-2$ raggiunge nell'intervallo $[-2,1]$ il valore massimo $z=1$ nel punto con $x=-1$. Per riscrivere l'insieme possiamo quindi utilizzare le condizioni $D=\left\{(x,y,z)\mid -2\le x\le 1, x^2\le y\le 2-x, 0\le z\le 2-x-y\right\}$.

10. Disegnate l'insieme $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 4, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{3x^2+3y^2}\right\}$.
L'insieme è dato dall'intersezione fra un guscio sferico di raggi 1 e 2 centrato nell'origine, e la regione di spazio contenuta fra i due coni apertura $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$ di vertice $(0,0,0)$. In coordinate polari sferiche l'insieme risulta un parallelepipedo:
$E'=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 1\le\rho\le 2, \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\theta\le 2\pi\right\}$.