GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione data. Si definisce grafico della funzione f l'insieme $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

In particolare per una funzione di due variabili avremo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il grafico della funzione f è l'insieme $G_f = \{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A\}$. Il grafico di una funzione reale di due variabili reali è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. È il solo caso di grafico che siamo in grado di disegnare.

INSIEMI DI LIVELLO

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione data. Si definisce insieme di livello *k* l'insieme $E_k = \{(x,y) \in A \mid f(x,y) = k\}$, cioè l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa immagine, o ancora la proiezione sul piano dei punti con uguale quota.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$

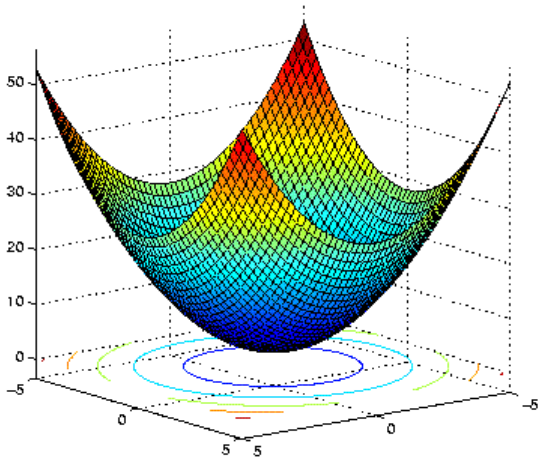


figura 1

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2$

Sezioni: $z = 0 \quad \varnothing$

$y = 0 \quad z = x^2 + 3$

$x = 0 \quad z = y^2 + 3$

Si tratta di un paraboloide di rotazione rivolto verso l'alto con vertice in $(0,0,3)$, che si ottiene ruotando la parabola $z = x^2 + 3$ (o $z = y^2 + 3$) attorno all'asse z (figura 1).

Insiemi di livello:

$$E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k - 3\} \text{ per } k \geq 3$$

$$E_k = \varnothing \text{ per } k < 3$$

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = 3$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 3$

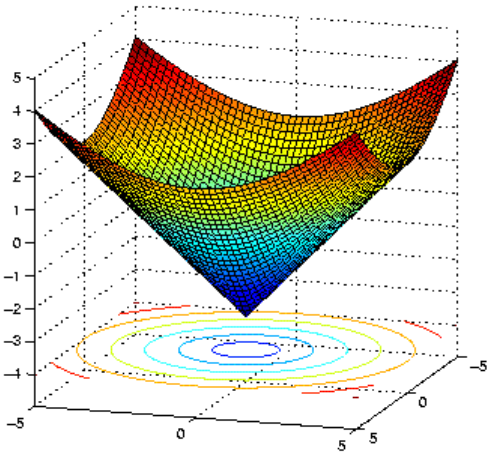


figura 2

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2$

Sezioni: $z = 0 \quad x^2 + y^2 = 9$

$y = 0 \quad z = |x| - 3$

$x = 0 \quad z = |y| - 3$

Si tratta di un cono circolare che si ottiene ruotando $z = |x| - 3$ (o $z = |y| - 3$) attorno all'asse z (vedi figura 2).

Insiemi di livello:

$$E_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (k+3)^2\right\} \text{ per } k \geq -3$$

$$E_k = \varnothing \text{ per } k < -3$$

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \text{ e } \inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = -3$$

3. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

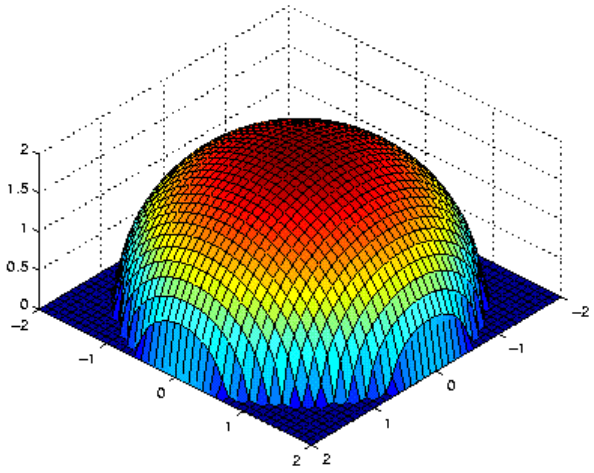


figura 3

$$\text{dom } f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\} = A$$

A è un insieme chiuso e limitato

Sezioni: $z = 0 \quad x^2 + y^2 = 4$

$$y = 0 \quad z = \sqrt{4 - x^2}$$

$$x = 0 \quad z = \sqrt{4 - y^2}$$

Si tratta della metà superiore della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio $R = 2$ (vedi figura 3).

Insiemi di livello:

$$E_k = \left\{(x,y) \in \text{dom } f : x^2 + y^2 = 4 - k^2\right\} \text{per } \ 0 \leq k \leq 2$$

$$E_k = \varnothing \text{ per } k < 0 \ \vee \ k > 2$$

$\sup_A f = \max_A f = 2$ e $\inf_A f = \min_A f = 0$

4. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

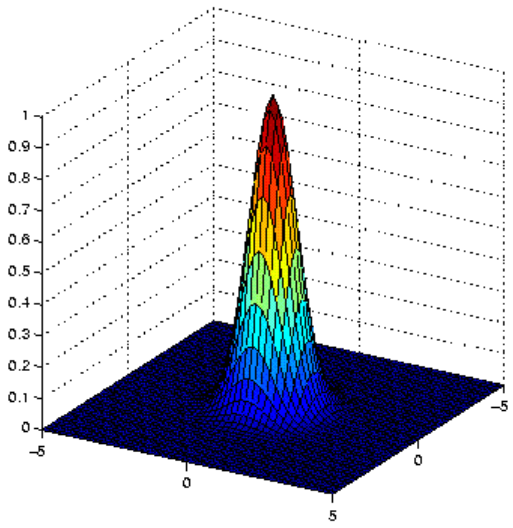


figura 4

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2$

Sezioni: $z = 0 \quad \varnothing$

$y = 0 \quad z = e^{-x^2}$

$x = 0 \quad z = e^{-y^2}$

La funzione presenta un massimo in corrispondenza di $(0,0)$ e decresce rapidamente in ogni direzione.

Insiemi di livello:

$$E_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \log \frac{1}{k} \right\} \text{ per } 0 < k \leq 1$$

$E_k = \varnothing$ per $k \leq 0 \ \vee \ k > 1$

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \max_{\mathbb{R}^2} = 1 = f(0,0)$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$.

Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente.

5. $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^4}$

Per determinare il dominio è necessario risolvere la disequazione $y^2 \geq x^4$. Troviamo quindi l'insieme risultante dall'unione delle due regioni interne alle parabole $y=x^2$ e $y=-x^2$: $\text{dom } f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq x^2\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\leq -x^2\}$. Nella figura 5 il dominio è la regione colorata in verde.

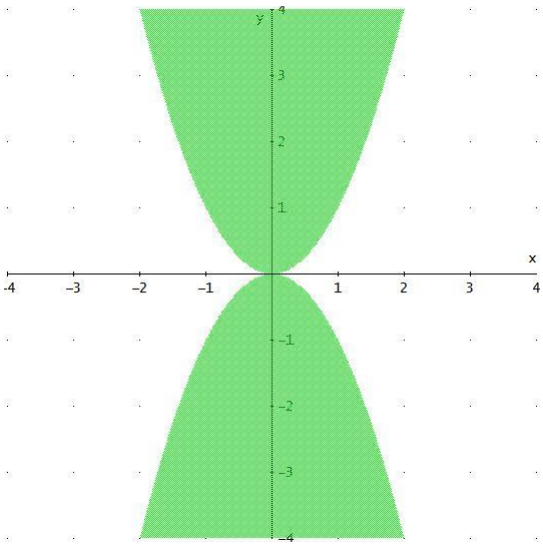


figura 5

6. $f(x,y)=\log\left(x^2y+xy^2\right)$

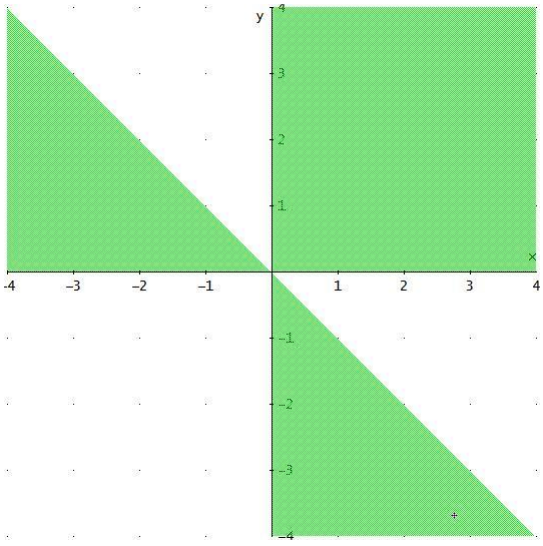


figura 6

Per determinare il dominio è necessario risolvere la disequazione $xy(x+y)>0$. Il dominio è dunque rappresentato da tutti i punti del I quadrante, e dai punti del II e IV quadrante che si trovano al di sopra della retta $y=-x$.

$\text{dom } f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (xy<0)\wedge(y<-x)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\}$

Nella figura 6 il dominio è la regione colorata in verde.

Determinare il dominio, gli zeri e il segno della funzione, dove possibile tramite lo studio degli insiemi di livello, gli estremi inferiore e superiore della funzione.

7. $f(x,y)=x-2y+1$

$\text{dom } f=\mathbb{R}^2$

Si tratta di un piano. Gli insiemi di livello si ottengono dall'equazione $x-2y+1=k$ e sono rette, qualunque sia il valore di *k*.

$E_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\frac{1}{2}x+\frac{1-k}{2}\right\},\ k\in\mathbb{R}$.

Abbiamo quindi $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$, e naturalmente si ha $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$.

8. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\text{dom } f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y \ \vee\ x\neq -y\}=A$

La funzione non è definita lungo le bisettrici dei quadranti del piano *xy*.

Gli insiemi di livello che si ottengono dall'equazione $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=k$ sono rette passanti per l'origine.

Per $k<-1 \ \vee\ k>1$ abbiamo $E_k=\left\{(x,y)\in\text{dom } f : y=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}x \ \vee\ y=-\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}x\right\}$

Per $k=1$ abbiamo $E_1=\{(x,y)\in\text{dom } f : y=0\}$, cioè l'asse *x*.

Per $k=-1$ abbiamo $E_{-1}=\{(x,y)\in\text{dom } f : x=0\}$, cioè l'asse *y*.

$E_k=\varnothing$ per $-1<k<1$

$\sup_A f=+\infty$ e $\inf_A f=-\infty$.

9. $f(x,y)=\log\left(1-x^2-y^2\right)$

$\text{dom } f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\right\}=A$

Il dominio è costituito dai punti interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. La funzione è non positiva e i suoi insiemi di livello sono dati da circonferenze centrate nell'origine:

$E_k=\left\{(x,y)\in A \mid x^2+y^2=1-e^k\right\}, k\le 0,$

mentre $E_k=\varnothing, k>0$

quindi $\inf\limits_A=-\infty$ e $\sup\limits_A=\max\limits_A=0$.

10. $f(x,y)=\sqrt{4x^2+9y^2-36}$

$$\text{dom } f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\ge 1\right\}=A.$$

Il dominio risulta dunque dato dalla ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $(3,2)$ e dalla parte di piano esterna ad essa. La funzione è non negativa e assume valore nullo sulla frontiera del dominio.

$E_k=\left\{(x,y)\in \text{dom } f : \frac{4x^2}{36+k^2}+\frac{9y^2}{36+k^2}=1\right\}$ per $k\ge 0$. Sono ellissi concentriche.

$E_k=\varnothing$ per $k<0$.

$\sup\limits_A f=+\infty$ e $\inf\limits_A f=\min\limits_A f=0$

11. $f(x,y)=x^2y$

$\text{dom } f=\mathbb{R}^2$

Gli insiemi di livello sono ottenuti dall'equazione $x^2y=k$ che ha soluzione per ogni valore di k, e sono parabole con vertice nell'origine e apertura $-k$.

$$E_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-\frac{k}{x^2}\right\}, k\in\mathbb{R}$$

perciò $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$, e naturalmente si ha $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ e $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$.

12. $f(x,y)=y^2-x^2+4x-4$

La funzione è definita ovunque in $\mathbb{R}^2$. Si tratta di un paraboloide iperbolico equilatero con punto sella in $(2,0)$. Possiamo riscrivere il polinomio nella forma $f(x,y)=y^2-x^2+4x-4=y^2-(x-2)^2=(y+x-2)(y-x+2)$ quindi per la legge di annullamento del prodotto riconosciamo gli zeri della funzione nei punti delle rette $y=x-2$ e $y=-x+2$. Gli insiemi di livello, $E_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2-(x-2)^2=k\right\}, k\in\mathbb{R}$, sono ovviamente iperboli, con asse principale parallelo all'asse *y* quelle corrispondenti alle sezioni con quota negativa, e con l'asse *x* come asse principale quelle a quota positiva, e $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$. Alcuni insiemi sono rappresentati nella figura 6.

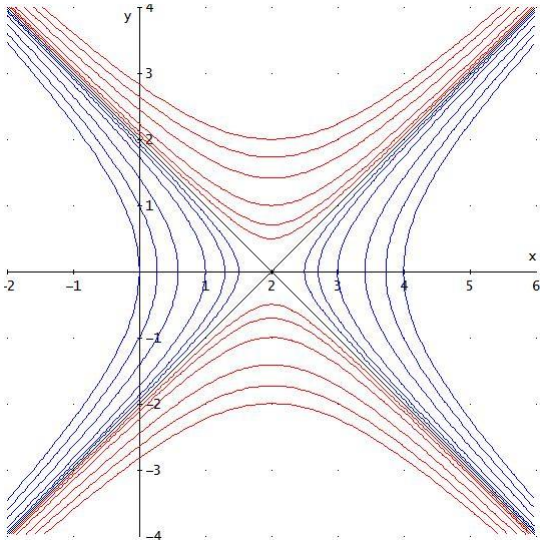


figura 7

Naturalmente si ha $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$.

Studiare gli zeri e il segno delle seguenti funzioni.

13. $f(x,y)=x^2y-xy^2-x+y$

La funzione è definita ovunque in $\mathbb{R}^2$. Per determinare gli zeri osserviamo che $x^2y-xy^2-x+y=0$ si può scrivere come $(x-y)(xy-1)=0$, quindi, per la legge di annullamento del prodotto, è $x-y=0 \ \vee \ xy-1=0$. Gli zeri della funzione sono dati dalla retta $y=x$ e dall'iperbole $y=\frac{1}{x}$. $E_0=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x \ \vee \ y=\frac{1}{x}\right\}$. La funzione assume valori positivi nelle regioni colorate in rosso nella figura 8. Notiamo il comportamento

particolare dei i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$: sono punti di sella della funzione, anche se la definizione per ora è fuori luogo. Per ora diciamo intuitivamente solo che esistono due rette lungo le quali la restrizione della funzione assume in quel punto valore massimo su una, valore minimo sull'altra. Ad esempio, nel punto $(1,1)$ $f(1,y)=-y^2+2y-1$ ha valore massimo per $y=1$ e $f(x,1)=x^2-2x+1$ ha valore minimo per $x=1$.

La funzione può assumere valori arbitrariamente grandi sia positivi che negativi, quindi $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$.

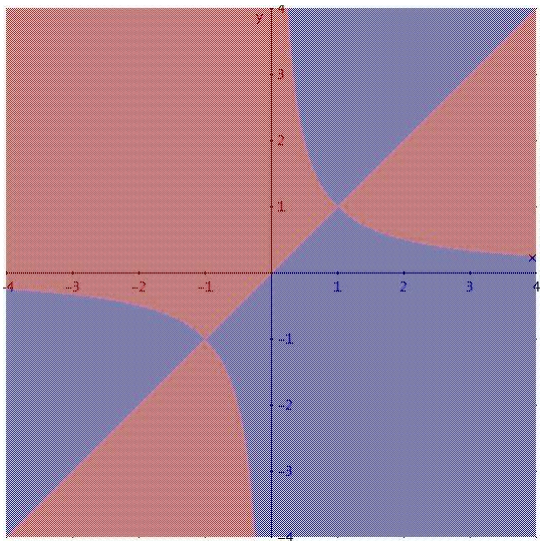


figura 8

14. $f(x,y)=x^2+y^2-2xy-2x+2y$

La funzione è definita ovunque in $\mathbb{R}^2$. Per determinare gli zeri osserviamo che $x^2+y^2-2xy-2x+2y=0$ si può scrivere come $(x-y)(x-y-2)=0$, quindi per la legge di annullamento del prodotto è $x-y=0 \vee x-y-2=0$. Gli zeri della funzione sono dati dalle rette parallele $y=x$ e $y=x-2$.

Nei due semipiani esterni rispetto a queste due rette la funzione assume valori positivi, nella striscia interna assume valori negativi, come mostrato nella figura 9 (rosso positivo, blu negativo).

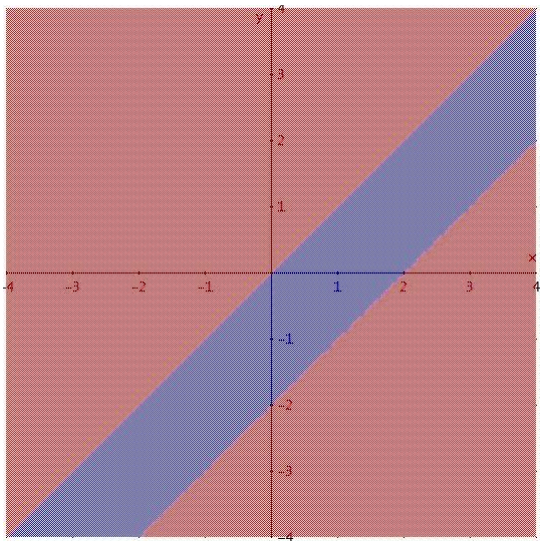


figura 9

La funzione può assumere valori positivi arbitrariamente grandi mentre nella striscia dove assume valori negativi raggiunge il valore minimo -1 lungo la retta $x-y-1=0$. Proviamo che $\min f=-1$. Questo significa che $x^2+y^2-2xy-2x+2y\geq -1$. Questo equivale a $(x-y)^2-2(x-y)+1\geq 0$, cioè $\big((x-y)-1\big)^2\geq 0$. Quindi possiamo dire che $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f=\min_{\mathbb{R}^2} f=-1$.