DEFINIZIONI UTILI

- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è detto intorno di $P_0 = (x_0, y_0)$ se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset A$.
- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è detto intorno di ∞ se esiste $r > 0$ tale che $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > r\} \subset A$.
- Un punto $(x_0, y_0) \in A$ è detto punto interno di A se A è un intorno di (x_0, y_0).
- Un punto (x_0, y_0) è detto punto di frontiera per A se per ogni $r > 0$ si ha $B(x_0, y_0; r) \cap A \neq \varnothing$ e $B(x_0, y_0; r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \varnothing$, cioè se in ogni suo intorno cadono contemporaneamente punti appartenenti ad A e al suo insieme complementare. Un punto di frontiera per un insieme può non appartenere all'insieme stesso. L'insieme di tutti i punti interni e di tutti i punti di frontiera si chiama chiusura di A e si indica con $\overline{A}$.
- Un punto (x_0, y_0) è detto punto di accumulazione per A se per ogni $r > 0$ si ha $B(x_0, y_0; r) \setminus \{(x_0, y_0)\} \cap A \neq \varnothing$ e $B_0(x_0, y_0; r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \varnothing$, cioè se in ogni suo intorno, escluso il punto stesso, cadono punti appartenenti ad A. Un punto di accumulazione per un insieme può quindi non appartenere all'insieme stesso.
- Si dice che ∞ è un punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$, $A \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B(0,0; R)) \neq \varnothing$.
- Limite al finito. Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e un punto (x_0, y_0) di accumulazione per A, si dice che $f(x, y)$ tende a ℓ, con $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, per (x, y) tendente a (x_0, y_0), quando per ogni intorno J di ℓ esiste un intorno H di (x_0, y_0) dove si ha che $f(x, y) \in J$ per ogni $(x, y) \in H \cap A \setminus \{(x_0, y_0)\}$ e si scrive $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$.
- Limite all'infinito. Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se ∞ è un punto di accumulazione per A si dice che $f(x, y)$ tende a ℓ, con $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, per $\|(x, y)\|$ tendente a ∞, quando per ogni intorno J di ℓ esiste un intorno H di ∞ dove si ha che $f(x, y) \in J$ per ogni $(x, y) \in H \cap A$ e si scrive $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x, y) = \ell$.

Anche per le funzioni di due variabili vale il teorema di unicità del limite. Ma se nelle funzioni di una variabile è sufficiente controllare che avvicinandosi al punto x_0 da destra e da sinistra il limite destro e sinistro siano uguali, per le funzioni di due variabili bisogna assicurarsi che qualunque modo di avvicinarsi a (x_0, y_0) porti allo stesso valore, in caso contrario il limite non esiste.

Verificare che i seguenti limiti non esistono

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2 + y^4}$

   $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Lungo $x=0$ abbiamo $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{y^4} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} 1 = 1$, mentre lungo $y=0$ abbiamo $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} 0 = 0$, quindi il limite non esiste.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Lungo $x=0$ abbiamo $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} 1 = 1$ e lungo $y=0$ abbiamo $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} 1 = 1$, perciò se il limite esiste deve valere 1. Invece lungo $y=x$ abbiamo $\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} 2 = 2$, quindi il limite non esiste.

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{x^2+|y|}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Lungo $x=0$ abbiamo $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{|y|} = 0$ e lungo $y=0$ abbiamo $\lim_{(x.0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$. Lungo $y=x^2$ abbiamo $\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|x^2|}}{x^2+|x^2|} = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x|x|}{2x^2}$ e questo limite non esiste.

4. $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{xy+2x-y-2}{x^2+y^2-2x+4y+5}$

Prima di tutto fattorizziamo i termini della frazione: $f(x,y) = \frac{(x-1)(y+2)}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,-2)\}$ e $(1,-2)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Osserviamo che $\lim_{(1,y)\to(1,-2)} \frac{0}{(y+2)^2} = 0$ e $\lim_{(x,-2)\to(1,-2)} \frac{0}{(x-1)^2} = 0$, quindi se il limite esiste vale 0. Se invece calcoliamo il limite sulla retta passante per il punto $(1,-2)$ e parallela alla

bisettrice del I e III quadrante, $y = x-3$ abbiamo $\lim_{(x,x-3)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}$, quindi il limite non esiste.

5. $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^3 y}{x^4+y^4}$

dom $f = \mathbb{R}^2$ e ∞ è un punto di accumulazione per dom f.

Lungo $x=0$ abbiamo $\lim_{\|(0,y)\|\to\infty} \frac{0}{y^4} = 0$ e lungo $y=0$ abbiamo $\lim_{\|(x,0)\|\to\infty} \frac{0}{x^4} = 0$, quindi se il limite esiste vale zero. Lungo la bisettrice del I e III quadrante, però, $\lim_{\|(x,x)\|\to\infty} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{\|(x,x)\|\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, quindi il limite non esiste.

6. $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} e^{-|x-y|}$

dom $f = \mathbb{R}^2$ e ∞ è un punto di accumulazione per dom f.
Lungo $x=0$ abbiamo $\lim_{\|(0,y)\|\to\infty} e^{-|-y|} = 0$ e lungo $y=0$ abbiamo $\lim_{\|(x,0)\|\to\infty} e^{-|x|} = 0$, quindi se il limite esiste deve valere 0. Lungo la bisettrice del I e III quadrante, però, $\lim_{\|(x,x)\|\to\infty} e^{-|0|} = 1$, perciò il limite non esiste.

Per dimostrare che un limite non esiste basta verificare che due modi diversi di avvicinarsi al punto di accumulazione in considerazione portano a conclusioni diverse. Per stabilire quando un limite esiste, invece, non potendo verificare direttamente il "per ogni" si ricorre a definizioni equivalenti di limite.

PASSAGGIO A COORDINATE POLARI

Limite finito al finito

Data una funzione *f* definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ che contiene il punto (x_0, y_0), le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f tende a ℓ quando $(x,y)\to(x_0,y_0)$
- esistono $\rho_0 > 0$ e una funzione $g :]0,\rho_0[\to [0,+\infty[$ tali che $g(\rho)\to 0$ quando $\rho \to 0^+$ e $|f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) - \ell| \le g(\rho)$ per ogni $\rho \in]0,\rho_0[$ e per ogni $\theta \in [0,2\pi]$.

Limite infinito al finito

Data una funzione *f* definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ che contiene il punto (x_0, y_0), le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f tende a $+\infty$ quando $(x,y)\to(x_0,y_0)$

- esistono $\rho_0 > 0$ e una funzione $g :]0, \rho_0[\to [0, +\infty[$ tali che $g(\rho) \to +\infty$ quando $\rho \to 0^+$ e $f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) \geq g(\rho)$ per ogni $\rho \in]0, \rho_0[$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Limite finito all'infinito

Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \supseteq (\mathbb{R}^2 \setminus B(0,0;R))$ per qualche $R > 0$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f tende a ℓ quando $\|(x,y)\| \to +\infty$
- esistono $\rho_0 > 0$ e una funzione $g :]\rho_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tali che $g(\rho) \to 0$ quando $\rho \to +\infty$ e $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| \leq g(\rho)$ per ogni $\rho > \rho_0$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Limite infinito all'infinito

Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \supseteq (\mathbb{R}^2 \setminus B(0,0;R))$ per qualche $R > 0$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f tende a $+\infty$ quando $\|(x,y)\| \to +\infty$
- esistono $\rho_0 > 0$ e una funzione $g :]\rho_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tali che $g(\rho) \to 0$ quando $\rho \to +\infty$ e $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \geq g(\rho)$ per ogni $\rho > \rho_0$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Per provare, invece, che $f(x,y) \to -\infty$ si applicano le definizioni precedenti a $-f$.

Calcolare i seguenti limiti:

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

   $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

   Notiamo che $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{m^2x^3}{2x^2} = 0$, quindi se il limite esiste vale 0.

   Per provarlo scriviamo il valore assoluto della funzione in coordinate polari e troviamo una maggiorazione che tenda a zero:

   $$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \left|\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\right| = |\rho\cos\theta\sin^2\theta| \leq \rho \to 0.$$

   Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Notiamo che $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{y^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{\left(1+m^3\right)x^3}{\left(1+m^2\right)x^2} = 0$, quindi se il limite esiste vale 0.

Per provarlo scriviamo il valore assoluto della funzione in coordinate polari e troviamo una maggiorazione che tenda a zero:

$$\left|f\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\right)\right| = \left|\frac{\rho^3\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{\rho^2}\right| = \left|\rho\left(\cos^3\theta+\sin^2\theta\right)\right| \le \rho \to 0.$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

In pratica, si può cercare di vedere se il valore del limite della funzione riscritta in coordinate polari è indipendente dall'angolo ed eventualmente cercare successivamente di maggiorare $\left|f\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\right)-\ell\right|$, se il limite è finito, oppure minorare $f\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\right)$, se il limite è infinito, con una opportuna funzione $g(\rho)$ che dunque non dipenda dall'angolo.

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Notiamo che $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Se il limite esiste deve essere 1. Verifichiamo scrivendo il valore assoluto della differenza fra la funzione in coordinate polari e il probabile limite:

$$\left|\frac{\rho^2\left(1+\rho^4\cos^3\theta\sin^3\theta\right)}{\rho^2}-1\right| = \left|1+\rho^4\cos^3\theta\sin^3\theta-1\right| \le \rho^4 \to 0.$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} = 1.$

10. $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{x^2+y^2}}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e ∞ è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$.

Scriviamo la funzione in coordinate polari e calcoliamo il limite per $\rho \to +\infty$.

$f\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\right) = \frac{2}{3+\frac{1}{\rho^2}}$ e $\lim_{\rho\to+\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{\rho^2}} = \frac{2}{3}$, quindi anche $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{x^2+y^2}} = \frac{2}{3}$.

11. $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \dfrac{x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$\text{dom}\, f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e ∞ è un punto di accumulazione per $\text{dom}\, f$.

Dato che il numeratore è di grado inferiore rispetto al denominatore, possiamo pensare che il limite all'infinito sia 0. Verifichiamo passando alle coordinate polari:

$\left| f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right| = \left|\dfrac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4}\right| = \left|\dfrac{\cos^2\theta\sin\theta}{\rho}\right| \le \dfrac{1}{\rho}$ e prendendo $g(\rho) = \dfrac{1}{\rho}$ dato che

$\lim_{\rho\to+\infty} \dfrac{1}{\rho} = 0$ possiamo concludere che $f(x,y) \to 0$ per $\|(x,y)\| \to +\infty$.

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$

$\text{dom}\, f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\text{dom}\, f$.

Lungo gli assi la funzione tende a 0 , quindi se il limite esiste è 0. Verifichiamo che

$\left| f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\right| = \left|\dfrac{\rho(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}{\rho^2}\right| = \dfrac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{\rho} \ge \dfrac{1}{\rho} \to +\infty$, quindi

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = +\infty$.

13. $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \dfrac{3x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$

$\text{dom}\, f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e ∞ è un punto di accumulazione per $\text{dom}\, f$

Passando alle coordinate polari abbiamo

$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \dfrac{3\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\sin^2\theta}} \ge \dfrac{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{2\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\sin^2\theta}} \ge \dfrac{\rho^2}{\sqrt{2}\rho} = \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}$.

Prendendo $g(\rho) = \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}$ vediamo che $\lim_{\rho\to+\infty} g(\rho) = +\infty$ e possiamo concludere che

$f(x,y) \to +\infty$ per $\|(x,y)\| \to +\infty$.

14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$

$\text{dom}\, f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\text{dom}\, f$.

Il limite non esiste, come si verifica facilmente dalle restrizioni lungo gli assi, che sono funzioni costanti: $f(0,y) = 2$ mentre $f(x,0) = \dfrac{1}{2}$.

15. $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e ∞ è un punto di accumulazione per $\text{dom } f$.
Lo stesso ragionamento fatto per il limite nell'origine ci assicura che questo limite non esiste.

16. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6+y^2}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\text{dom } f$.
Il limite non esiste. Per mostrarlo basta osservare che lungo gli assi la funzione è nulla, mentre lungo curva $y = x^3$, la funzione ha valore costante ma diverso da zero
$f(x, x^3) = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$.

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \log(x^2+y^2)$

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\text{dom } f$.
Se il limite esiste è 0 perché la funzione sugli assi è nulla.
$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = |\rho^2 \cos\theta \sin\theta \log(\rho^2)| \le \rho^2 \log(\rho^2) \to 0$.

18. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $(0,0)$ è un punto di accumulazione per $\text{dom } f$.
Lungo gli assi la funzione è nulla, quindi se il limite esiste deve essere 0. Con qualche passaggio algebrico sfruttiamo un limite notevole:
$f(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Ma abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$, limite notevole e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$ (molto simile all'esercizio 7), quindi il limite dato è effettivamente 0.