Verificare mediante la definizione i seguenti limiti.

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{y-2} = -1$

   Partendo da $\left|\frac{x}{y-2}+1\right| < \varepsilon$ dobbiamo individuare un intorno del punto $(1,1)$. Si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{y-2} < \varepsilon - 1 \\ \frac{x}{y-2} > -\varepsilon - 1 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{y-2}{x} > \frac{1}{\varepsilon - 1} \\ \frac{y-2}{x} < -\frac{1}{\varepsilon + 1} \end{cases}$$

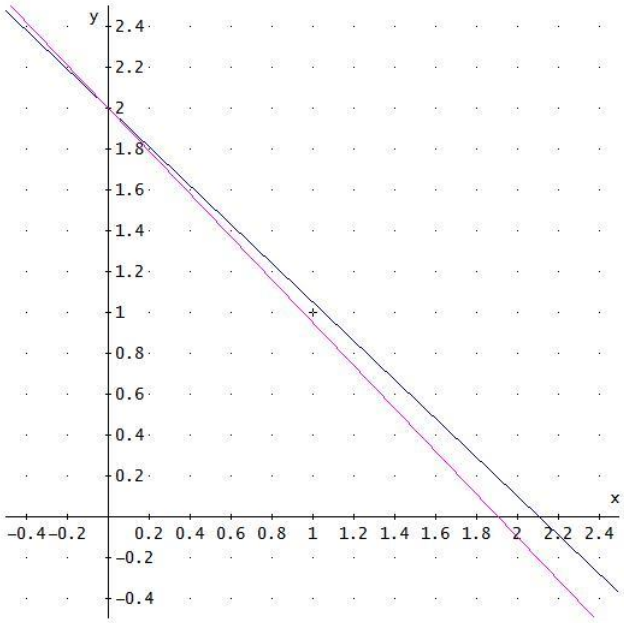


figura 1

   Non perdiamo nulla limitandoci a $x > 0$, in quanto $(1,1)$ si trova per l'appunto nel semipiano $x > 0$.

$$\begin{cases} y - 2 > \frac{x}{\varepsilon - 1} \\ y - 2 < -\frac{x}{\varepsilon + 1} \end{cases} \to \begin{cases} y > -\frac{1}{1-\varepsilon}x + 2 \\ y < -\frac{1}{1+\varepsilon}x + 2 \end{cases}$$

   Nella figura 1 è mostrata la parte di piano contenuta fra le rette individuate dal sistema ponendo $\varepsilon = 0.05$. Osserviamo che effettivamente il punto $(1,1)$ è contenuto fra queste per ogni valore di ε.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{x+y+2} = \frac{1}{2}$

Partendo da $\left|\frac{x+1}{x+y+2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ dobbiamo individuare un intorno del punto $(0,0)$. Si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases}\frac{x+1}{x+y+2}<\frac{1}{2}+\varepsilon\\ \frac{x+1}{x+y+2}>\frac{1}{2}-\varepsilon\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{x+y+2}{x+1}>\frac{2}{1+2\varepsilon}\\ \frac{x+y+2}{x+1}<\frac{2}{1-2\varepsilon}\end{cases}$$

Non perdiamo nulla limitandoci a $x>-1$, in quanto $(0,0)$ si trova per l'appunto nel semipiano $x>-1$.

$$\begin{cases}x+y+2>\frac{2}{1+2\varepsilon}(x+1)\\ x+y+2<\frac{2}{1-2\varepsilon}(x+1)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y>\frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}x-\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}\\ y<\frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}x+\frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}\end{cases}.$$

Nella figura 2 è mostrata la regione compresa fra le due rette individuate dal sistema per il valore $\varepsilon=0.01$. Osserviamo che l'origine è sempre compresa in questa regione per ogni valore di ε.

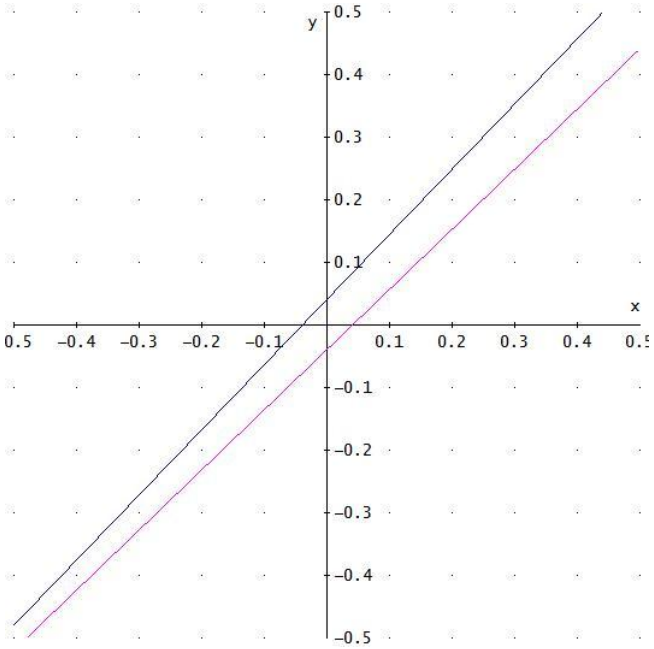


figura 2

CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

La funzione $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ si dice continua nel punto $(x_0,y_0)\in\Omega$ se (x_0,y_0) è un punto di accumulazione di Ω e $\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ oppure se (x_0,y_0) è un punto isolato di Ω.

Se $f(x,y)$ è continua per ogni $(x_0,y_0)\in\Omega$ allora si dice che è continua in Ω. In simboli si dice $f\in C^0(\Omega)$.

Studiare la continuità delle seguenti funzioni definite in $\mathbb{R}^2$.

3. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & (x,y)\neq(0,-1)\\ 0 & (x,y)=(0,-1)\end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$ la funzione è continua perché composta da funzioni continue. Bisogna verificare che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)}\dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}=0$.

Le restrizioni all'asse *y* e alla retta $y=-1$ sono funzioni nulle. Anche la restrizione alla retta $y=x-1$ $f(x,x-1)=\dfrac{x^3}{x^2}$ tende a 0 quando *x* tende a 0. Verifichiamo in coordinate polari: $f(\rho\cos\theta,-1+\rho\sin\theta)=\dfrac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{2\rho^2}=\rho\dfrac{\cos^2\theta\sin\theta}{2}\to 0$. La funzione, pertanto, è continua su tutto il piano, o meglio ancora $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

4. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(\sin y)^2}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La funzione risulta continua sull'insieme $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perché ottenuta con operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni continue. Resta da verificare il comportamento nell'origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(\sin y)^2}{x^2+2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy^2}{x^2+2y^2}\right)\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy^2}{x^2+2y^2}\right)\cdot 1.$$

Passando quest'ultimo limite in coordinate polari abbiamo $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\rho^3(\cos\theta\sin^2\theta)}{\rho^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)}\le\lim\limits_{\rho\to0}\rho=0$

Possiamo quindi affermare che $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

5. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\cos(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La funzione risulta continua sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché ottenuta con operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni continue. Resta da verificare come si comporta la funzione in prossimità dell'origine. Osserviamo che dato che la restrizione alla bisettrice del I e III quadrante $f(x,x) = \dfrac{x^2 \cos(x^2)}{2x^2} \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{2}$ la funzione non è continua.

6. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(2x-y)-x^2}{2(x^2+y^4)} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ -\dfrac{1}{2} & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione risulta continua sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché ottenuta con operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente di funzioni continue. Resta da verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3(2x-y)-x^2}{2(x^2+y^4)} = -\frac{1}{2}$$

Si vede che questo è vero lungo $x=0$, lungo $y=0$, lungo $y=2x$. Verifichiamo riscrivendo la funzione in coordinate polari e sfruttando la consueta algebra dei limiti:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\left[\rho^2 \sin\theta(2\cos\theta - \sin\theta) - \cos^2\theta\right]}{2\rho^2\left(\cos^2\theta + \rho^2 \sin^4\theta\right)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\left[-\cos^2\theta\right]}{2(\cos^2\theta)} = -\frac{1}{2}.$$

La funzione, pertanto, è $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

7. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione risulta continua sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché ottenuta con operazioni di somma, prodotto e quoziente di funzioni continue. Resta da verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$$

Si vede che questo è vero lungo $x=0$, lungo $y=0$, lungo $y=x$. Ma lungo $x=y^2$ abbiamo $f(y^2,y) = \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$. Dunque $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, perciò la funzione data è $f \in C^0\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$.

8. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|x|}\cdot y}{|x|+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

La funzione risulta continua sull'insieme $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perché ottenuta con operazioni di somma, prodotto e quoziente di funzioni continue. Resta da verificare se $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{|x|}\cdot y}{|x|+y^2}=0$.

Abbiamo già visto in un esercizio molto simile che mentre le restrizioni sugli assi cartesiani sono funzioni costanti nulle, la restrizione alla curva $x=y^2$ è $f(y^2,y)=\dfrac{y|y|}{2y^2}$ e non ha limite per $y\to 0$, perciò questo limite non esiste.

La funzione è $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)$.

9. Stabilite, motivando la risposta, in quali punti di $\mathbb{R}^2$ risulta continua la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x\sin y}{x^2+2y^2}+2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ la funzione è continua perché ottenuta da funzioni continue. Per avere la continuità in $(0,0)$ si deve avere $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{2x\sin y}{x^2+2y^2}+2\right)=2$, cioè $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x\sin y}{x^2+2y^2}=0$.

Chiamiamo $g(x,y)=\dfrac{2x\sin y}{x^2+2y^2}$.

Lungo gli assi questa funzione è nulla: $g(0,y)=g(x,0)=0$ e anche il limite risulta 0.

Lungo la bisettrice del I e III quadrante, invece, $g(x,x)=\dfrac{2x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2\sin x}{3x}$. Ma $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Ne possiamo dedurre che il limite non esiste, quindi $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)$.

10. $f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right| & \text{se } x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x=0\end{cases}$

La funzione è continua su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, infatti posto $\bar{y}\neq 0$ $\lim_{(x,\bar{y})\to(0,\bar{y})}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{\pi}{2}$ mentre $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|$ non esiste, perché la restrizione all'asse *x* risulta $f(x,0)=0$ mentre le restrizioni alle bisettrici dei quadranti risultano $f(x,x)=f(x,-x)=\dfrac{\pi}{4}$ e quindi avvicinandosi all'origine su curve diverse si osservano comportamenti diversi fra loro e dal valore della funzione $f(0,0)=\dfrac{\pi}{2}$.

11. $f(x,y)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right| & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

Per $\alpha>0$ il termine $|x|^{\alpha}\to 0$, mentre $\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|$ è una funzione ovunque limitata. La funzione è continua su $\mathbb{R}^2$, infatti $\lim_{(x,\bar{y})\to(0,\bar{y})}|x|^{\alpha}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|=0$.

12. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

La funzione è continua su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perché ottenuta componendo funzioni continue.

Risulta continua anche su $\mathbb{R}^2$ se $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x|^{\alpha}}{x^2+y^2}=0$, cioè se si ha

$\left|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right|=\left|\dfrac{|\rho\cos\theta|^{\alpha}}{\rho^2}\right|\le\rho^{\alpha-2}|\cos\theta|\le\rho^{\alpha-2}\to 0$, e questo accade per $\alpha>2$.

13. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2-y^2} & |x|\neq|y|\\ 0 & |x|=|y|\end{cases}$

La funzione è continua in ogni punto che non appartenga alle due bisettrici.

Possiamo provare a prendere un punto sulla retta $y=x$, ad esempio $(1,1)$ e vedere se $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}$ esiste e ha valore 0.

Procediamo scegliendo come restrizione della funzione la parabola $y = x^2$, che passa per l'appunto per $(1,1)$. $f\left(x, x^2\right) = \frac{x^4}{x^2 - x^4} = \frac{x^2}{1 - x^2}$. Osserviamo però che $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{1 - x^2}$ non esiste perché risultano rispettivamente $+\infty$ il limite sinistro e $-\infty$ il limite destro, quindi la funzione data non può essere continua su $\mathbb{R}^2$.

Possiamo dire di più considerando il comportamento per $(x, y) \to (x_0, x_0)$, cioè per un qualunque punto della bisettrice del I-III quadrante. Una curva che certamente passa per (x_0, x_0) è ad esempio l'iperbole $y = \frac{x_0^2}{x}$. La restrizione $f\left(x, \frac{x_0^2}{x}\right) = \frac{x x_0^2}{x^2 - \frac{x_0^4}{x^2}} = \frac{x^3 x_0^2}{x^4 - x_0^4}$ non ha limite per $x \to x_0$ in quanto limite destro e limite sinistro divergono con segni opposti. La funzione dunque è continua solo sull'insieme $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \neq |y|\right\}$.