TEOREMA DI WEIERSTRASS: sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, cioè chiuso e limitato. Se $f : K \to \mathbb{R}$ è continua allora $\exists \mathbf{x}_{\min} \in K$ e $\exists \mathbf{x}_{\max} \in K$ tali che $\forall \mathbf{x} \in K \quad f(\mathbf{x}_{\min}) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_{\max})$.

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2 + y^2 + 16 - 8x$. Si calcolino i punti di minimo e massimo assoluti di f su $D = \{(x,y) \mid y \ge 0, 4x - 3 \le x^2 + y^2 \le 6x - 5\}$.

   La funzione assume ovunque valori non negativi $f(x,y) = x^2 + y^2 + 16 - 8x = (x-4)^2 + y^2 \ge 0$ che diventano arbitrariamente grandi allontanandosi dall'origine: $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$. È un paraboloide di vertice $(4,0,0)$, con apertura verso l'alto e a sezione circolare. $\min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0 = f(4,0)$.

   L'insieme *D* è la porzione di piano costituita dai punti di ordinata positiva esterni alla circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1, e interni rispetto alla circonferenza di centro $(3,0)$ e raggio 3. Dato che l'insieme D è compatto (chiuso e limitato) e la funzione è continua perché composta da funzioni elementari continue, per il teorema di Weierstrass la funzione su questo insieme assume un valore minimo e un valore massimo. Il punto di minimo assoluto già individuato appartiene all'insieme D, perciò $\min_D f(x,y) = 0 = f(4,0)$.

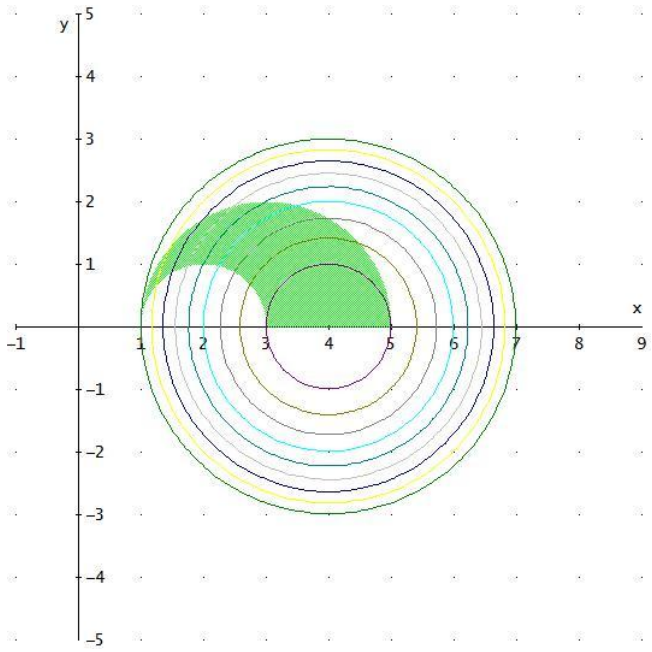


figura 1

Il punto di massimo assoluto su *D* può essere rapidamente determinato con il metodo degli insiemi di livello (figura 1): $E_k = \{(x,y) \mid (x-4)^2 + y^2 = k\}, k \ge 0$ sono circonferenze di centro

$(4,0)$ corrispondenti a quote più elevate mano a mano che ci si allontana dal centro. Il punto di *D* più lontano da $(4,0)$ è $(1,0)$. Abbiamo quindi $\max_D f(x,y) = 9 = f(1,0)$.

2. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x + 2y$. Determinare i punti di massimo e minimo della funzione f sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

La funzione, è definita su tutto il piano ($\text{dom } f = \mathbb{R}^2$) e continua in tutto il suo dominio $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$. L'insieme *K* è un cerchio, quindi è chiuso e limitato. Perciò, per il teorema di Weierstrass la funzione ammette un valore minimo e un valore massimo su questo insieme.

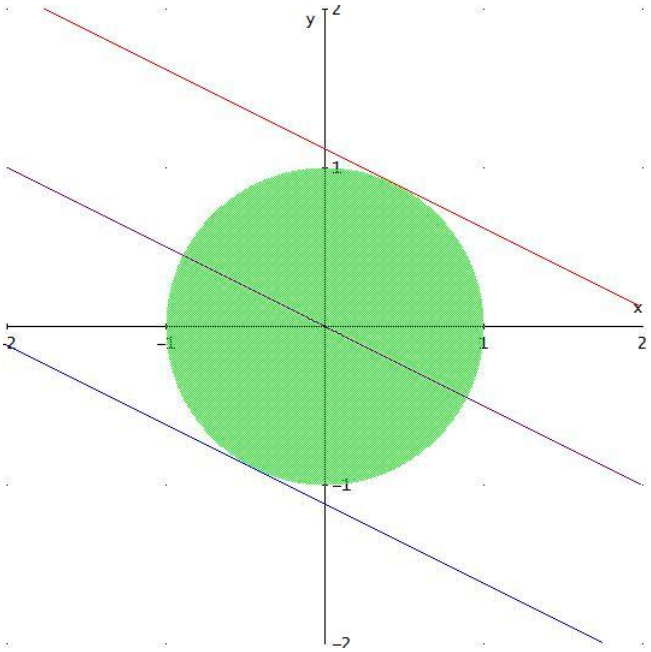


figura 2

Data la forma assai semplice della funzione, è possibile disegnarne gli insiemi di livello, che sono rette parallele: $E_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}\right\}, \forall k \in \mathbb{R}$. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente, cioè $\sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$, e nulla lungo la retta $y = -\frac{1}{2}x$, mentre è positiva per i punti appartenenti al semipiano superiore e negativa per quelli appartenenti al semipiano inferiore. La quota aumenta nella direzione perpendicolare a quella degli insiemi di livello, cioè lungo $y = 2x$, perciò i punti di massimo e minimo si individuano intersecando il bordo dell'insieme *K* con questa retta:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Il punto di minimo è $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $\min_K f(x,y)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$. Il punto di massimo è invece $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $\max_K f(x,y)=f\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$. Nella figura 2 sono mostrate le linee di livello con $k=0$, $k=-\sqrt{5}$, $k=\sqrt{5}$ e il cerchio *K*.

3. Sia $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y)=x^2-y^2-4x-2y+3$. Si consideri l'insieme $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2-4x+8y+4\le 0\right\}$ e si calcolino i valori minimo e massimo della funzione su *K*.

La funzione $f(x,y)=x^2-y^2-4x-2y+3=(x-2)^2-(y+1)^2$ è un paraboloide iperbolico di punto sella $(2,-1)$. La funzione è dunque continua su tutto il piano ed è illimitata superiormente e inferiormente: $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$.

Gli insiemi di livello corrispondenti a quote positive sono iperboli equilatere di asse trasverso $y=-1$ e asse principale $x=2$, mentre gli insiemi di livello corrispondenti a quote negative sono iperboli equilatere di asse trasverso $x=2$ e asse principale $y=-1$.
L'insieme *K*, chiuso e limitato, perciò compatto, è dato dai punti interni all'ellisse di centro $(2,-1)$ e semiassi $(2,1)$. Possiamo quindi dire che i punti di massimo e di minimo della funzione su *K*, sicuramente esistenti in virtù del teorema di Weierstrass, sono i punti in cui le iperboli degli insiemi di livello sono tangenti all'ellisse. Dobbiamo quindi determinare per quali valori del parametro *k* il sistema

$$\begin{cases} (x-2)^2-(y+1)^2=k \\ (x-2)^2+4(y+1)^2=4 \end{cases}$$

ha soluzioni di molteplicità 2.

$$\begin{cases} (x-2)^2=k+(y+1)^2 \\ k+(y+1)^2+4(y+1)^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} * \\ 5(y+1)^2=4-k \end{cases}$$ $y=-1$ radice di molteplicità 2 per $k=4$

da cui $\max_K f(x,y)=f(0,-1)=f(4,-1)=4$.

$$\begin{cases} (y+1)^2=(x-2)^2-k \\ (x-2)^2+4(x-2)^2-4k=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} * \\ 5(x-2)^2=4(k+1) \end{cases}$$ $x=2$ radice di molteplicità 2 per $k=-1$

da cui $\min_K f(x,y)=f(2,0)=f(2,-2)=-1$

Nella figura 3 sono mostrati gli insiemi di livello per $k = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ sovrapposti all'insieme *K*.

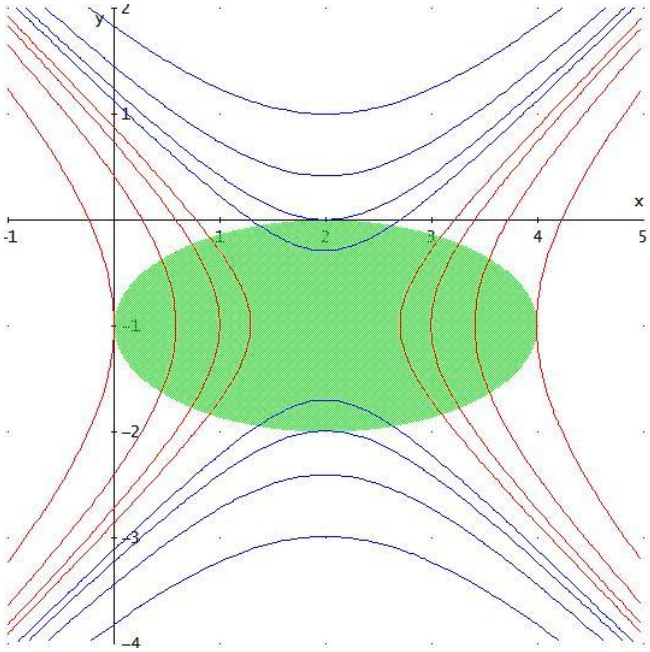


figura 3

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = e^{3x+y}$. Si consideri l'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1, |2y-3| \le 3\}$ e si calcolino i valori minimo e massimo della funzione su *K*.

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

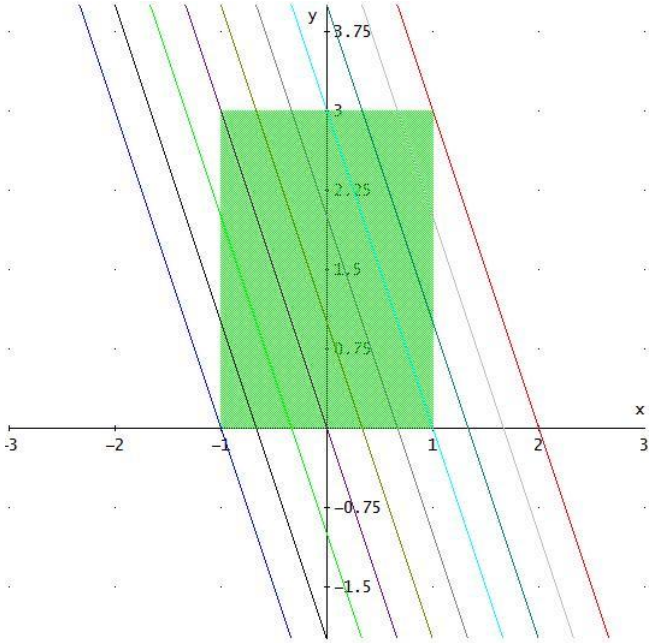
Da $e^{3x+y} = k$ con $k > 0$ abbiamo $E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -3x + \log k\}$.

All'aumentare della quota, aumenta l'intercetta della retta.

L'insieme dato è il rettangolo $[-1,1] \times [0,3]$. Sovrapponendo i due grafici vediamo che il minimo si ha sopra il punto $(-1,0)$ che si trova sulla retta per $k = e^{-3}$ e il massimo si ha sopra il punto $(1,3)$ che si trova sulla retta per $k = e^6$.

$\max_E f(x,y) = e^6 = f(1,3)$ $\qquad$ $\min_E f(x,y) = e^{-3} = f(-1,0)$.

Nella figura 4 sono mostrati l'insieme *K* e gli insiemi di livello per $k = e^m$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $-3 \le m \le 6$.



.

figura 4

DEFINIZIONE: DERIVATA DIREZIONALE E GRADIENTE

Si chiama derivata direzionale rispetto al vettore $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ nel punto (x_0,y_0) si indica con $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0)$ il limite del rapporto incrementale $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$.

Questo limite, quando $\mathbf{v}=(1,0)=e_1$, $\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ viene detto derivata parziale fatta rispetto a *x* e quando $\mathbf{v}=(0,1)=e_2$, $\frac{\partial f}{\partial(0,1)}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ viene detto derivata parziale fatta rispetto a *y*.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

costituiscono le componenti del vettore gradiente che si indica con

$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

Il gradiente è il vettore che indica la massima pendenza di *f*, cioè la direzione lungo la quale la funzione ha il maggior incremento. Il gradiente è in ogni punto perpendicolare alle curve di livello.

Calcolare la derivata direzionale delle seguenti funzioni nel punto indicato e lungo la direzione data

5. $f(x,y)=x^2-y^2$ nel punto $(x_0,y_0)=(2,-1)$ nella direzione $\mathbf{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

dom $f=\mathbb{R}^2$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Abbiamo $f(x_0,y_0)=f(2,-1)=3$ e

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(2,-1)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-3}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{6t}{\sqrt{2}}}{t}=3\sqrt{2}.$$

6. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ nel punto $(0,1)$ nella direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

dom $f=\mathbb{R}^2$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Abbiamo $f(x_0,y_0)=f(0,1)=e$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\frac{t^2}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{2}}t+\frac{t^2}{2}}-e}{t}=e\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\sqrt{2}t+t^2}-1}{t}=e\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{-\sqrt{2}t+t^2}-1}{-\sqrt{2}t+t^2}\cdot\frac{-\sqrt{2}t+t^2}{t}\right)=-\sqrt{2}e.$$

Calcolare la derivata direzionale delle seguenti funzioni ed esplicitare il risultato lungo le direzioni date.

7. $f(x,y)=3x-2y^4$, $\mathbf{v}_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\mathbf{v}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

dom $f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{3(x+tv_1)-2(y+tv_2)^4-3x+2y^4}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3tv_1-8y^3tv_2-12y^2t^2v_2^2-8yt^3v_2^3-2t^4v_2^4}{t}=3v_1-8y^3v_2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)}(x,y)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-4y^3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(x,y)=-\frac{3}{\sqrt{2}}-4\sqrt{2}y^3.$$

8. $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)$ lungo le direzioni $\mathbf{v}_1=(1,0)$ e $\mathbf{v}_2=(0,1)$

dom $f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}\big((x+tv_1)(y+tv_2)\big)-\operatorname{sen}(xy)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(xy)\cos\left(xtv_2+ytv_1+t^2v_1v_2\right)+\cos(xy)\operatorname{sen}\left(xtv_2+ytv_1+t^2v_1v_2\right)-\operatorname{sen}xy}{t}=$$

$$=\cos xy\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\left(\operatorname{sen}\big((xv_2+yv_1)t\big)\cos\left(t^2v_1v_2\right)+\cos\big((xv_2+yv_1)t\big)\operatorname{sen}\left(t^2v_1v_2\right)\right)}{t}=$$

$$=\cos(xy)(xv_2+yv_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(x,y)=y\cos(xy)\qquad\qquad\frac{\partial f}{\partial(0,1)}(x,y)=x\cos(xy)$$

Queste sono le derivate parziali fatte rispetto a x e rispetto a y. Sono perciò le componenti del vettore gradiente della funzione: $\nabla f(x,y)=\big(y\cos(xy),x\cos(xy)\big)$.

Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

9. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

dom $f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

10. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

dom $f=A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\neq -y\}$ e $f\in C^0(A)$.

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{2y}{(x+y)^2},-\frac{2x}{(x+y)^2}\right).$$

11. $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La funzione data è definita su tutto il piano, ed è continua sull'insieme $\mathbb{R}^2$. Infatti, come si può notare scrivendo la funzione in coordinate polari $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{\rho^2}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$.

Sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x \cos \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, 2y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y \cos \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \right).$$

In $(0,0)$ ricorriamo alla definizione per calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t^2}}{t} = 0 \text{ e allo stesso modo}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t^2}}{t} = 0.$$

Perciò $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Osserviamo però che le derivate parziali prime non sono continue nell'origine.

12. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione è definita in ogni punto del piano ma non è continua in $(0,0)$, perché

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ non esiste, come si può notare limitando lo studio ad opportune restrizioni:

$f(0,y) = f(x,0) = 0$ ma $f(y^2,y) = \dfrac{1}{2}$. Abbiamo trovato restrizioni che sono funzioni costanti, ma con valore diverso, quindi il limite nell'origine non esiste.

Sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ abbiamo $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{y^2(y^4-x^2)}{(x^2+y^4)^2}, \dfrac{2xy(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} \right)$.

Nel punto $(0,0)$ calcoliamo le derivate direzionali rispetto al generico vettore $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \dfrac{v_2^2}{v_1} & v_1 \neq 0 \\ 0 & v_1 = 0 \end{cases}.$$

Quindi esistono le derivate parziali prime nell'origine, e con esse il gradiente $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Determinare la direzione di massima pendenza del grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati

13. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$ nel punto $(1,0)$

$\text{dom } f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Il gradiente della funzione è $\nabla f(x,y)=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, quindi $\nabla f(1,0)=(-1,0)$.

La direzione lungo la quale si ha il maggior incremento della funzione si ottiene dividendo questo vettore per la sua norma:

$\frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}=\frac{(-1,)}{1}=(-1,0)$, che significa verso sinistra lungo l'asse *x*.

Gli insiemi di livello della funzione sono $E_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=(1-k)^2\right\}, k\le 1$

Osserviamo che l'insieme di livello a cui appartiene il punto $(1,0)$ è quello per $k=0$. La funzione quindi ha valore nullo e la direzione di massima pendenza è quella che porta da $(1,0,0)$ verso il vertice $(0,0,1)$, quindi proprio la direzione $-x$, ed è perpendicolare rispetto alla circonferenza.

14. $f(x,y)=4-x^2-y^2$ nel punto $(1,1)$.

$\text{dom } f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Il gradiente della funzione è $\nabla f(x,y)=(-2x,-2y)$, e nel punto considerato vale $\nabla(1,1)=(-2,-2)$, perciò il versore della direzione di massima pendenza è $\frac{(-2,-2)}{2\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, che significa lungo la bisettrice del I-III quadrante, verso l'origine.

Anche qui gli insiemi di livello sono circonferenze $E_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=4-k\right\}, k\le 4$ e il punto $(1,1)$ appartiene alla circonferenza $x^2+y^2=2$, quindi quella per $k=2$. Anche qui osserviamo che dal punto $(1,1,2)$ la direzione in cui il grafico ha la maggior pendenza è proprio quella che porta verso il vertice $(0,0,4)$, quindi dal punto $(1,1)$ verso l'origine.