DEFINIZIONE: FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO.

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f:A\to\mathbb{R}$. Preso $(x_0,y_0)\in A$ si dice che f è differenziabile in (x_0,y_0) se esiste un vettore (a,b) tale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-a(x-x_0)-b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

e si pone $df(x_0,y_0)=(a,b)$.

Si dimostra che $a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, quindi $(a,b)=\nabla f(x_0,y_0)$. Riscriviamo dunque la definizione come $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\langle\nabla f(x_0,y_0)\,|\,(x-x_0,y-y_0)\rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f:A\to\mathbb{R}$ e $(x_0,y_0)\in A$. Se esistono le derivate parziali di f in un intorno di (x_0,y_0) e sono continue in (x_0,y_0) allora f è differenziabile in (x_0,y_0). Inoltre, se f ha derivate parziali continue per ogni punto di A, cioè se $f\in C^1(A)$, la funzione è differenziabile in A.

OSSERVAZIONE: il teorema del differenziale totale pone una condizione sufficiente, ma non necessaria.

1. Si studino la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verifichiamo in coordinate polari la continuità: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\dfrac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2}=1$. Perciò possiamo scrivere $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Le derivate parziali prime della funzione sono

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x\left(e^{x^2+y^2}(x^2+y^2-1)+1\right)}{(x^2+y^2)^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{\frac{e^{t^2}-1}{t^2}-1}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{e^{t^2}-1-t^2}{t^3}=\lim_{t\to0}\dfrac{1+t^2+\frac{t^4}{2}-1-t^2}{t^3}=\lim_{t\to0}\dfrac{t^4}{2t^3}=0$ se $(x,y)=(0,0)$.

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y\left(e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2-1\right)+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ se } (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \text{ se } (x,y)=(0,0).$$

Le derivate parziali sono funzioni continue anche nell'origine, come si mostra sostituendo nuovamente il termine esponenziale con il polinomio di Taylor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x\left(e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2-1\right)+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{2\rho\cos\theta\left(e^{\rho^2}\left(\rho^2-1\right)+1\right)}{\rho^4}=$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{2\rho\cos\theta\left(\left(1+\rho^2+\frac{\rho^4}{2}\right)\left(\rho^2-1\right)+1\right)}{\rho^4}=\lim_{\rho\to0}\frac{2\rho\cos\theta\rho^4\left(\frac{1}{2}+\frac{\rho^2}{2}\right)}{\rho^4}=0.$$

Si applica il teorema del differenziale totale perché $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ perciò la funzione è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

Se invece avessimo applicato la definizione di differenziabilità in $(0,0)$, considerando che $f(0,0)=1$ e $\nabla f(0,0)=(0,0)$ avremmo eseguito questo calcolo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{e^{\rho^2}-1-\rho^2}{\rho^3}=\lim_{\rho\to0}\frac{1+\rho^2+\frac{\rho^4}{2}-1-\rho^2}{\rho^3}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^4}{2\rho^3}=0$$

concludendo anche in questo caso che la funzione è differenziabile anche nell'origine, quindi in tutto il piano.

2. Si studino la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(\sin y)^2}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verifichiamo la continuità della funzione in esame:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(\sin y)^2}{x^2+2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy^2}{x^2+2y^2}\right)\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy^2}{x^2+2y^2}\right)\cdot1.$$

Passando quest'ultimo limite in coordinate polari abbiamo

$\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\left(\cos\theta\sin^2\theta\right)}{\rho^2\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)}\le\lim_{\rho\to0}|\rho|=0$. Possiamo quindi affermare che $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Verifichiamo l'esistenza delle derivate prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(-x^2+2y^2\right)(\sin y)^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t^2}=0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y\cos y\left(x^2+2y^2\right)-4xy(\sin y)^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{2t^2}=0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Le derivate prime, però, non sono continue in $(0,0)$. Infatti

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left(-x^2+2y^2\right)(\sin y)^2}{\left(x^2+2y^2\right)^2}\quad \nexists$.

Questo significa che non possiamo applicare il teorema del differenziale totale, ma non significa che la funzione non sia differenziabile.

Dato che $f(x_0,y_0)=0$ e $\nabla f(0,0)=(0,0)$ il limite da calcolare si riduce a

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\dfrac{x(\sin y)^2}{x^2+2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Questo limite però non esiste, come si mostra con la restrizione lungo la bisettrice del I e III quadrante: $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)}\dfrac{x(\sin x)^2}{3x^2|x|}\quad \nexists$. Pertanto la funzione non è differenziabile nell'origine.

3. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\cos(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Si dica (giustificandone l'affermazione) se

a) f è continua in $(0,0)$;
b) f ha derivate parziali prime in $(0,0)$;
c) f è differenziabile in $(0,0)$.

La funzione data è continua in $(0,0)$ se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos(xy)}{x^2+y^2} = 0$. Osserviamo che dato che la restrizione alla bisettrice del I e III quadrante $f(x,x) = \frac{x^2\cos(x^2)}{2x^2} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}$ la funzione non è continua nell'origine $f \in C^0\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$.

La funzione data ha derivate parziali prime in $(0,0)$ se esistono i limiti $\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$ e $\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$.

Possiamo subito vedere che $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$, quindi pur non essendo continua ha derivate prime in $(0,0)$, e $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

La funzione data è differenziabile in $(0,0)$ se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0) | (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Questo limite non esiste; infatti i limiti calcolati sulle restrizioni agli assi cartesiani possono valere $\pm\infty$. Il calcolo del limite, in realtà, non è necessario: una funzione differenziabile in punto è anche continua in quel punto, quindi la funzione assegnata non è differenziabile in $(0,0)$ non essendo continua in $(0,0)$.

4. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$.

Definire f in $(0,0)$ affinché essa sia continua in $(0,0)$ (giustificando le affermazioni fatte).

Si dimostri che f è differenziabile in $(0,0)$ (con il valore con cui è stata definita in $(0,0)$ in modo da essere continua).

La funzione data è continua se $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$. Il limite da calcolare in coordinate polari risulta $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos^3\theta \sin\theta}{\rho^2} = 0$.

Definiamo quindi $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

In $(0,0)$ abbiamo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{0}{t}=0$ e
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{0}{t}=0$, quindi le derivate prime della funzione sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+3x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{se } (x,y)=(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{se } (x,y)=(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Le derivate prime sono funzioni continue, infatti passando a coordinate polari abbiamo rispettivamente $\lim_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^5\cos^2\theta\sin\theta\left(1+2\sin^2\theta\right)}{\rho^4}=0$ e $\lim_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^5\cos^3\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{\rho^4}=0$.

Si può applicare il teorema del differenziale totale alla funzione in esame perché $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ perciò essa è differenziabile in $(0,0)$.

5. Sia data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$\begin{cases}xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se ne studi la differenziabilità.

La funzione è continua su tutto il piano; su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ perché composta con funzioni elementari, in $(0,0)$ perché, come si verifica in coordinate polari:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{\rho^2}=0$.

Le derivate parziali prime sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y^2}\left(\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)=(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}\left(\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)=(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Le derivate prime non hanno limite per $(x,y)\to(0,0)$, quindi non sono continue in $(0,0)$.

Non possiamo applicare il teorema del differenziale totale nell'origine, perciò dobbiamo applicare la definizione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho}=0\ .$$

La funzione è dunque differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

6. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } xy\neq0\\ 2 & \text{se } xy=0\end{cases}$$

e ricordando la definizione di continuità e differenziabilità dire se

1. f è continua in $(0,0)$;
2. esistono le $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
3. f è differenziabile in $(0,0)$.

La funzione è nulla su tutto il piano mentre vale 2 al di sopra degli assi cartesiani.

La funzione non è continua in $(0,0)$. Infatti la condizione di continuità sarebbe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=2$, ma questo limite invece non esiste.

Esistono invece le derivare prime: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{2-2}{t}=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{2-2}{t}=0$, perciò $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Dato che la funzione non è continua in $(0,0)$ non è nemmeno differenziabile. Per la differenziabilità si dovrebbe avere $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0)|(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, ma questo limite non esiste.

DEFINIZIONE DI PIANO TANGENTE

Se f è differenziabile in (x_0,y_0), allora esiste il piano tangente al grafico di *f* nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, e ha equazione $z-f(x_0,y_0)=\langle \nabla f(x_0,y_0)|(x-x_0,y-y_0)\rangle$.

7. Considerate la funzione $f(x,y)=6xy^2-2x^2y$. Determinate il gradiente di f e l'equazione del piano tangente al grafico di *f* sopra il punto $(1,1)$.

   $\text{dom } f=\mathbb{R}^2$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$

   $\nabla f(x,y)=(6y^2-4xy,12xy-2x^2)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ quindi f è differenziabile su tutto il piano.

   Il grafico di *f* ammette pertanto piano tangente in ogni punto, in particolare nel punto $(1,1,f(1,1))$.

   $\nabla f(1,1)=(2,10)$, $f(1,1)=4$

   L'equazione del piano tangente è
   $z=f(1,1)+\langle \nabla f(1,1)|(x-1,y-1)\rangle=4+2(x-1)+10(y-1)$ quindi $z=2x+10y-8$.

8. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)=x^y+y^x$ nel punto $(1,1,2)$.

   $\text{dom } f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,y>0\}=A.$

   $\nabla f(x,y)=(yx^{y-1}+y^x\log y, x^y\log x+xy^{x-1})$, $f\in C^1(A)$
   Quindi per il teorema del differenziale totale f è differenziabile su tutto il dominio.
   Ammette perciò piano tangente in ogni punto del grafico, in particolare in $(1,1,f(1,1))$.
   $f(1,1)=2$ e $\nabla f(1,1)=(1,1)$ e il piano tangente ha equazione
   $z=f(1,1)+\langle \nabla f(1,1)|(x-1,y-1)\rangle=2+x-1+y-1$ quindi $z=x+y$.