INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE
ESERCITAZIONI DI ANALISI C SETTIMANA 8

DERIVATE DI FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

MATRICE JACOBIANA

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita su un aperto di uno spazio *n*-dimensionale a *m* componenti, è derivabile parzialmente in $\mathbf{x} \in A$ se ogni componente di f è derivabile parzialmente in **x**. La matrice $m \times n$, costituita dalle *m* righe corrispondenti alle m componenti della funzione derivate parziali rispetto alle n variabili, è detta matrice jacobiana.

DIVERGENZA

Per le funzioni $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si definisce un altro operatore differenziale, la divergenza di *f*, così costruita: $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$.

Inoltre per funzioni $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si definisce il vettore rotore:

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right).$$

Scrivere la matrice jacobiana delle seguenti funzioni

1. $f(x,y) = \left(ye^{x^2}, \sin\left(x^2 + \frac{y}{3} \right) \right)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2} & e^{x^2} \\ 2x\cos\left(x^2 + \frac{y}{3} \right) & \frac{1}{3}\cos\left(x^2 + \frac{y}{3} \right) \end{pmatrix}$$

2. $f(x,y,z) = \left(2x^2, \sin y, e^{z^2} \right)$

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2ze^{z^2} \end{pmatrix}$$

Calcolare divergenza e rotore delle seguenti funzioni

3. $f(x,y,x) = \left(2x^2, \sin y, e^{z^2} \right)$

$\operatorname{div} f(x,y,z) = 4x + \cos y + 2ze^{z^2}$ $\qquad$ $\operatorname{rot} f(x,y,z) = (0,0,0)$

4. $f(x,y,z) = \left(yz, -x\cos z, ye^x \right)$

$\operatorname{div} f(x,y,z) = 0$ $\qquad$ $\operatorname{rot} f(x,y,z) = \left(e^x - x\sin z, y - ye^x, -\cos z - z \right)$

STUDIO DI FUNZIONE REALE DI DUE VARIABILI REALI

PUNTI STAZIONARI

Sia $f:\text{dom}\, f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia (x_0, y_0) un punto interno al dominio. Il punto (x_0, y_0) si dice stazionario se la funzione è differenziabile in (x_0, y_0) e il differenziale è nullo. Questo significa che $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$.

MATRICE HESSIANA

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Sia (x_0, y_0) un punto stazionario:

se $\det Hf(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale per *f*;

se $\det Hf(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale per *f*;

se $\det Hf(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di sella per *f*.

La condizione $\det Hf(x_0, y_0) = 0$ non permette di concludere nulla sulla natura del punto stazionario.

5. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$, determinate i punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$, studiandone la natura, e i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione f sull'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{7}{3} \le x \le \frac{5}{3}, -1 \le y \le 1\right\}$.

   $\text{dom}\, f = \mathbb{R}$, la funzione è un polinomio quindi si ha $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

   Il gradiente della funzione è: $\nabla f(x,y) = (3y^2 - 3, 6xy + 2y - 6)$. Le componenti sono funzioni continue quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

   Ricerca dei punti stazionari: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 3y^2 - 3 = 0 \\ 6xy + 2y - 6 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Per determinare la natura dei punti stazionari scriviamo la matrice hessiana e il suo determinante: $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 6y \\ 6y & 6x+2 \end{pmatrix}$ e $\det Hf(x,y)=-36y^2\le 0$.

In particolare abbiamo $\det Hf\left(\frac{2}{3},1\right)=\det Hf\left(-\frac{4}{3},-1\right)=-36<0$, quindi i punti stazionari sono punti di sella.

L'insieme *E* è un insieme chiuso e compatto, un rettangolo, e per il teorema di Weierstrass la funzione ammette un valore massimo e un valore minimo su *E*. I punti di massimo e minimo non possono essere punti interni, in quanto non vi sono altri punti stazionari a parte i due punti sella identificati, quindi si trovano sulla frontiera di *E*.

Calcoliamo il valore della funzione sui vertici del rettangolo:

$f\left(-\frac{7}{3},-1\right)=14$, $f\left(\frac{5}{3},-1\right)=14$, $f\left(\frac{5}{3},1\right)=2$ e $f\left(-\frac{7}{3},1\right)=2$.

Sul lato che va dal punto $\left(-\frac{7}{3},-1\right)$ al punto $\left(\frac{5}{3},-1\right)$, la funzione è costante:

$f(x,-1)=g(x)=14$.

Sul lato che va dal punto $\left(\frac{5}{3},-1\right)$ al punto $\left(\frac{5}{3},1\right)$, la funzione è $f\left(\frac{5}{3},y\right)=g(y)=6y^2-6y+2$

con derivata prima $g'(x)=12y-6$ che si annulla per $y=\frac{1}{2}$, cioè quando $f\left(\frac{5}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Sul lato che va dal punto $\left(\frac{5}{3},1\right)$ al punto $\left(-\frac{7}{3},1\right)$ la funzione è costante: $f(x,1)=g(x)=2$.

Sul lato che va dal punto $\left(-\frac{7}{3},1\right)$ al punto $\left(-\frac{7}{3},-1\right)$ la funzione è

$f\left(-\frac{7}{3},y\right)=g(y)=-6y^2-6y+14$ con derivata prima $g'(x)=-12y-6$ che si annulla per $y=-\frac{1}{2}$, cioè quando $f\left(-\frac{7}{3},-\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{2}$.

Abbiamo quindi che $\min_E f(x,y)=f\left(\frac{5}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ e $\max_E f(x,y)=f\left(-\frac{7}{3},-\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{2}$.

6. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=x^2+y^3-6xy$, determinate i punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$, studiandone la natura, e i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione f sull'insieme $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, \frac{x}{6}\leq y\leq 1\right\}$.

$\text{dom } f=\mathbb{R}$, la funzione è un polinomio quindi si ha $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Il gradiente della funzione è: $\nabla f(x,y)=\left(2x-6y,3y^2-6x\right)$. Le componenti sono funzioni continue quindi $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ e per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

Ricerca dei punti stazionari: $\nabla f(x,y)=(0,0)$.

$$\begin{cases}2x-6y=0\\3y^2-6x=0\end{cases}\to\begin{cases}x=3y\\3y^2-18y=0\end{cases}\to\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=18\\y=6\end{cases}$$

Per determinare la natura dei punti stazionari scriviamo la matrice hessiana e il suo determinante: $Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2&6\\6&6y\end{pmatrix}$ e $\det Hf(x,y)=12y-36$.

In particolare abbiamo $\det Hf(0,0)=-36<0$, quindi l'origine è un punto di sella, mentre $\det Hf(18,6)=36>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(18,6)=2>0$ quindi si tratta di un minimo locale, e $f(18,6)=-108$. L'insieme *E* è un insieme chiuso e compatto, un triangolo, e per il teorema di Weierstrass la funzione ammette un valore massimo e un valore minimo su *E*. Dei punti stazionari determinati, $(0,0)$ si trova sulla frontiera di *E* mentre $(18,6)$ è esterno. I punti di massimo e di minimo quindi si trovano sulla frontiera di *E*.

Calcoliamo il valore della funzione sui vertici del triangolo: $f(0,0)=0$, $f(0,1)=1$, e $f(6,1)=1$.

Sul lato che va dal punto $(0,0)$ al punto $(0,1)$, la funzione è: $f(0,y)=g(y)=y^3$, e ha il valore minimo per $y=0$, $f(0,0)=0$ e raggiunge il valore massimo per $y=1$, $f(0,1)=1$

Sul lato che va dal punto $(0,1)$ al punto $(6,1)$, la funzione è: $f(x,1)=g(x)=x^2-6x+1$, con derivata prima $g'(x)=2x-6$ e ha il valore minimo per $x=3$: $f(3,1)=-8$. Sul lato che va dal punto $(0,0)$ al punto $(6,1)$, la funzione è : $f\left(x,\frac{x}{6}\right)=\frac{x^3}{216}$, quindi ha valore minimo per $x=0$.

In conclusione $\min_E f(x,y)=f(3,1)=-8$ e $\max_E f(x,y)=f(0,1)=f(6,1)=1$.

7. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = -x^3 + y^3 + x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 + 4x - 4y - 4$.
Determinare l'estremo superiore ed inferiore di f su $\mathbb{R}^2$ e classificare i punti stazionari.
Determinare i punti di massimo e di minimo di f sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

La funzione può essere scritta in forma fattorizzata: $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 4)(-x + y + 1)$. Questo ci permette di dire che la funzione si annulla sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2 e sulla retta $y = x - 1$. La funzione è positiva nella regione interna alla circonferenza sotto la retta e nella regione esterna sopra la retta.

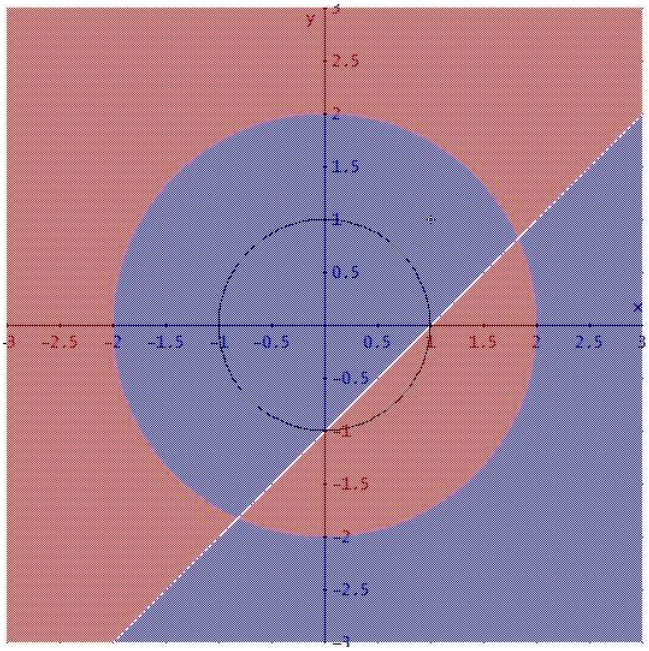

figura 1

Osservando il comportamento della restrizione $f(x,-x) = -4x^3 + 2x^2 + 8x - 4$, che è un polinomio di terzo grado, possiamo vedere che la funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente: $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.

In figura 1, come sempre, il rosso indica valori positivi, il blu valori negativi e il bordo dell'insieme *K* è indicato in nero.

$\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4, 3y^2 + x^2 - 2xy + 2y - 4)$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{cases} -3x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4 = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 2xy + 2y - 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 2xy + 2y - 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} (x+y)(-x+y+1) = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 2xy + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-y \\ 3x^2-x-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=y+1 \\ 2y^2+2y-3=0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi identificato i punti: $A=(1,-1)$; $B=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$; $C=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2},\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$;

$D=\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Il punto *A* deve essere un punto di massimo locale, perché unico punto stazionario interno ad un insieme chiuso e limitato sul quale la funzione assume valori positivi all'interno e valore nullo lungo il bordo: $f(1,-1)=2$

Il punto *B* deve essere un punto di minimo locale, perché unico punto stazionario interno ad un insieme chiuso e limitato sul quale la funzione assume valori negativi all'interno e valore nullo lungo il bordo: $f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{196}{27}$.

I punti *C* e *D* sono intersezioni fra la retta e la circonferenza lungo le quali la funzione si annulla, quindi sono punti di sella.

L'insieme *K* è chiuso e limitato, quindi per il teorema di Weierstrass la funzione f, che è continua, ammette un valore massimo e un valore minimo su questo insieme. Osserviamo che dei punti stazionari della funzione solo $B\in K$. Studiamo il comportamento lungo ∂K scrivendo l'equazione della circonferenza in equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

$f(\cos t,\sin t)=g(t)=(\cos^2 t+\sin^2 t-4)(-\cos t+\sin t+1)=3\cos t-3\sin t-3.$

$g'(t)=-3\sin t-3\cos t$ e $g'\left(\frac{3}{4}\pi\right)=g'\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$.

$t=\frac{3}{4}\pi\rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3\sqrt{2}-3>-\frac{196}{27}$.

$t=\frac{7}{4}\pi\rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}-3=\max_K f(x,y)$

Riassumendo: $\max_K f(x,y)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}-3$ e $\min_K f(x,y)=f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{196}{27}$.

8. Sia $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y)=x^3y-y^2-3xy+1$. Determinare l'estremo inferiore e superiore di f su $\mathbb{R}^2$ e classificarne i punti stazionari.

   Determinare i punti di massimo e minimo di f sull'insieme $K=\{(x,y)\,|\,x^3-3x\le y\le 2x, x\ge 0\}$

.

$f \in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$ in quanto composta da funzioni elementari continue, ed è illimitata sia superiormente che inferiormente. Motiviamo questa affermazione con lo studio delle restrizioni della funzione alle bisettrici dei quadranti: $f(x,x) = x^4 - 4x^2 + 1$ diverge positivamente, mentre $f(x,-x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ diverge negativamente. Non essendo possibile la fattorizzazione del polinomio, lo studio del segno della funzione risulta molto difficile, quindi non lo eseguiamo.

Studiamo invece il gradiente $\nabla f(x,y) = \left(3y\left(x^2-1\right), x^3 - 2y - 3x\right)$. Abbiamo i seguenti punti stazionari: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $\left(\pm\sqrt{3},0\right)$.

Calcoliamo la matrice hessiana e il suo determinante:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3\left(x^2-1\right) \\ 3\left(x^2-1\right) & -2 \end{pmatrix} \text{ e } \det Hf(x,y) = -12xy - 9\left(x^2-1\right)^2.$$

$\det Hf(0,0) = -9$ punto di sella

$\det Hf(1,-1) = 12$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = -6$ punto di massimo relativo con $f(1,-1) = 2$

$\det Hf(-1,1) = 12$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = -6$ punto di massimo relativo con $f(-1,1) = 2$

$\det Hf\left(\pm\sqrt{3},0\right) = -36$ punti di sella.

K è un insieme chiuso e limitato, la funzione è continua e quindi per il teorema di Weierstrass la funzione ha un massimo e un minimo su questo insieme. Il punto $(1,-1)$ di massimo relativo è interno a *K*, e non ci sono altri punti stazionari all'interno. Studiamo quindi la funzione su ∂K. Il bordo è dato da un segmento sulla retta $y = 2x$ di estremi $(0,0)$ e $\left(\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)$, e un arco sulla cubica $y = x^3 - 3x$. Abbiamo: $f(0,0) = 1$ e $f\left(\sqrt{5},2\sqrt{5}\right) = 1$.

Sul segmento $f(x,2x) = g(x) = 2x^4 - 10x^2 + 1$ con derivata $g'(x) = 8x^3 - 20x$ che si annulla per $x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$, punto interno al segmento, e in corrispondenza la funzione assume il valore $f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10}\right) = -\dfrac{23}{2}$. Sull'arco di cubica $f\left(x, x^3 - 3x\right) = g(x) = 1$ la funzione è costante.

In conclusione $\min\limits_K f(x,y) = f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10}\right) = -\dfrac{23}{2}$ e $\max\limits_K f(x,y) = f(-1,1) = 2$.