1. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - x.$$

Determinare i punti di minimo e di massimo, relativi ed assoluti, di f su $\mathbb{R}^2$. Calcolare i punti di minimo e massimo assoluti di f su $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 2x \le 1\}$.

dom $f = \mathbb{R}^2$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

La funzione da studiare può essere scritta in forma fattorizzata $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x = x(x^2 + y^2 - 1)$, mettendo così in luce il fatto che la funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente dato che il fattore *x* può divergere sia positivamente che negativamente. La funzione si annulla lungo l'asse *y* e lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

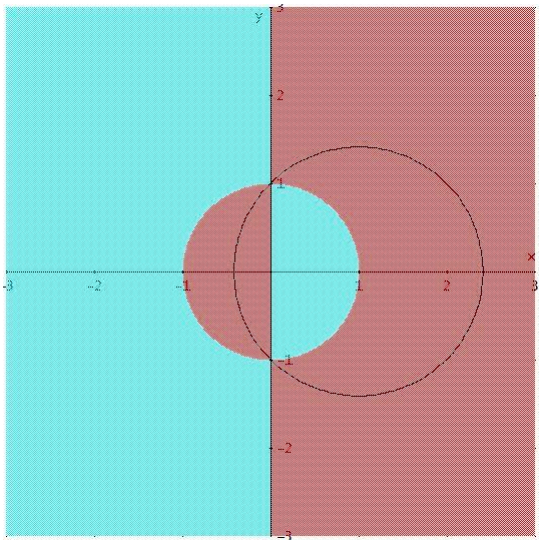


figura 1

La matrice hessiana della funzione è: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, quindi

$\det Hf(x,y) = 4(3x^2 - y^2)$. La funzione in esame, quindi, è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$.

$\det Hf(0,\pm 1) = -4$ quindi questi sono punti di sella.

$\det Hf\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = 4$, quindi questi sono punti di massimo o minimo relativo:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = 2\sqrt{3}$ quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ punto di minimo relativo con $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = -2\sqrt{3}$ quindi $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ punto di massimo relativo con $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ di minimo relativo è interno a *K*. Studiamo quindi il comportamento di f su ∂K.

Utilizziamo le equazioni parametriche della circonferenza $\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$.

$f(x,y) = g(t) = 4\cos^2 t + 4\sqrt{2}\cos t + 2$ con derivata $g'(t) = -4\sin t\left(2\cos t + \sqrt{2}\right)$ che si annulla per:

$t = 0 \to f\left(1+\sqrt{2},0\right) = 6+4\sqrt{2}$,

$t = \pi \to f\left(1-\sqrt{2},0\right) = 6-4\sqrt{2}$,

$t = \pm\frac{3}{4}\pi \to f(0,\pm 1) = 0$.

Riassumendo: $\min_K f(x,y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ e $\max_K f(x,y) = f\left(1+\sqrt{2},0\right) = 6+4\sqrt{2}$.

TEOREMA SUI MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Sia *G* un vincolo e sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in un aperto $A \supset G$. Se un punto $\mathbf{x}_0$ interno a *G* è un punto di massimo o di minimo relativo vincolato per la funzione *f*, se quest'ultima è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e se il vincolo *G* è regolare in un intorno di $\mathbf{x}_0$, allora il vettore $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ è ortogonale a *G* in $\mathbf{x}_0$.

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Dobbiamo cercare massimi e minimi di una funzione $f(x,y)$ differenziabile che abbia curve di livello $f(x,y) = k$ soggetta al vincolo $g(x,y) = 0$. Quando $g(x,y)$ è tangente alle curve di livello di f siamo in un punto stazionario vincolato. Questo significa che il gradiente di f è perpendicolare al vincolo, cioè ∇f risulta essere un multiplo di ∇g. Il valore di questo multiplo non nullo (il moltiplicatore di Lagrange) si determina assieme alle coordinate dei punti stazionari mediante il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

2. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^3 - xy^2 .$$

Studiare zeri e segno della funzione. Determinare i punti di minimo e di massimo, relativi ed assoluti, di f su $\mathbb{R}^2$. Calcolare i punti di minimo e massimo assoluti di f sull'insieme $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$.

dom $f = \mathbb{R}^2$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

Scrivendo la funzione in forma fattorizzata, $f(x,y) = x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x+y)(x-y)$, vediamo che si annulla lungo le bisettrici dei quadranti e lungo l'asse y. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente e quindi $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.

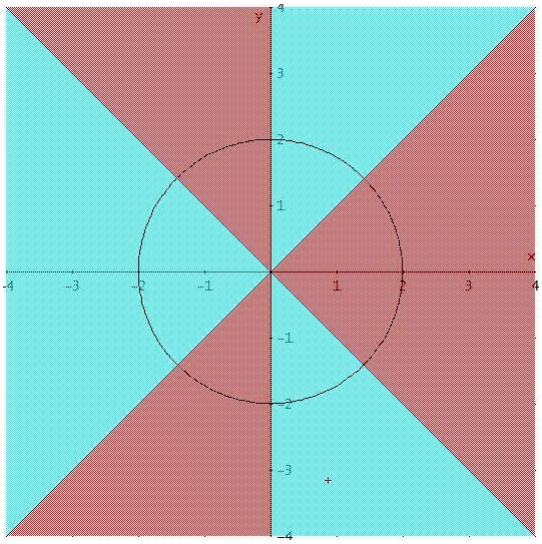


figura 2

Il gradiente della funzione $\nabla f(x,y) = (3x^2 - y^2, -2xy)$ si annulla solo in $(0,0)$, che è un punto di sella, e $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

La matrice hessiana della funzione è: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$, e la funzione in esame, quindi, è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$.

L'insieme K è chiuso e limitato e per il teorema di Weierstrass la funzione, che è continua, ammette un valore massimo ed uno minimo su tale insieme. Studiamo la funzione sulla frontiera di K, dal momento che tra i punti interni non figurano né massimi né minimi locali.

Utilizzando le equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ la funzione diventa $f(2\cos t, 2\sin t) = g(t) = 16\cos^3 t - 8\cos t$ con derivata $g'(t) = 8\sin t - 48\sin t \cos^2 t$ che si annulla per $t = 0 \ \vee \ t = \pi$ e per $\cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Queste condizioni identificano i punti sui quali valutare la funzione

$$f(2,0) = 8,\ f(-2,0) = -8,\ f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{8}{9}\sqrt{6},\ f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{8}{9}\sqrt{6},$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{8}{9}\sqrt{6} \text{ e } f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{8}{9}\sqrt{6}.$$

Abbiamo quindi $\min_K f(x,y) = f(-2,0) = -8$ e $\max_K f(x,y) = f(2,0) = 8$.

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange abbiamo da risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2\lambda x \\ -2xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Non risulta particolarmente più semplice, ma ci porta agli stessi risultati

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ \lambda = -x \\ y^2 = 4 - x^2 \\ 6x^2 - 4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

I punti stazionari sul vincolo sono dunque:
$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right), (2,0)$ e $(-2,0)$.

Abbiamo già identificato fra questi gli ultimi due punti come punti di massimo e di minimo assoluti sul vincolo.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \left(x - x^2\right)\left(y^2 - 4\right)$$

determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e il massimo e il minimo assoluti di f sull'insieme $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, |y| \le 1\right\}$.

$\text{dom}\, f = \mathbb{R}^2$ e $f \in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$.

La funzione si annulla lungo le rette $x = 0$, $x = 1$, $y = \pm 2$, e risulta negativa nel rettangolo centrale, a segni alternati nelle regioni limitrofe. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente e $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$.

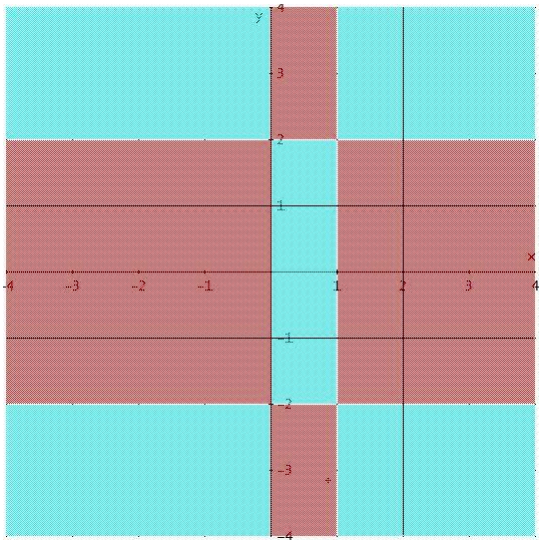


figura 3

Il gradiente della funzione è $\nabla f(x,y) = \left((1-2x)\left(y^2-4\right), 2y\left(x-x^2\right)\right)$ e $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. I punti $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(0,2)$, $(0,-2)$, $(1,2)$ e $(1,-2)$.

La matrice hessiana è $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2\left(y^2-4\right) & 2y(1-2x) \\ 2y(1-2x) & 2\left(x-x^2\right) \end{pmatrix}$ e quindi la funzione è di classe $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Il determinante non ha un'espressione generale semplice, quindi risulta più vantaggioso il calcolo della matrice nei vari punti.

$Hf\left(\frac{1}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e quindi questo è un minimo locale con $f\left(\frac{1}{2},0\right) = -1$

$Hf(0,2) = Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e sono punti di sella

$Hf(0,-2) = Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e anche questi sono punti di sella.

L'insieme *K* è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi si applica il teorema di Weierstrass. Il minimo locale che abbiamo individuato è interno a *K*, resta da studiare ∂K.

Sui vertici del quadrato abbiamo $f(0,-1) = f(0,1) = 0$, $f(2,-1) = f(2,1) = 6$.

Sul lato da $(0,-1)$ a $(0,1)$ la funzione è nulla.

Sul lato da $(0,1)$ a $(2,1)$ la funzione è $f(x,1)=g(x)=3\left(x^2-x\right)$ e ha un minimo per $x=\frac{1}{2}$ e quindi $f\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{3}{4}$.

Sul lato da $(2,1)$ a $(2,-1)$ la funzione è $f(2,y)=g(y)=-2\left(y^2-4\right)$ e ha un massimo per $y=0$ e quindi $f(2,0)=8$.

Sul lato da $(2,-1)$ a $(0,-1)$ la funzione è $f(x,-1)=g(x)=3\left(x^2-x\right)$ e ha un minimo per $x=\frac{1}{2}$ e quindi $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{3}{4}$.

In conclusione $\min_K f(x,y)=f\left(\frac{1}{2},0\right)=-1$ e $\max_K f(x,y)=f(2,0)=8$.

4. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y)=x^4+2y^4+3x^2y^2-4x^2-6y^2+4$$

e sia $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,|x|+|y|\le 2\right\}$. Determinare i punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$ e classificarli. Determinare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$, $\min_K f(x,y)$ e $\max_K f(x,y)$.

$\operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Se si riesce nella fattorizzazione del polinomio l'esercizio è molto semplice:

$x^4+2y^4+3x^2y^2-4x^2-6y^2+4$

$x^4+x^2y^2-2x^2+2x^2y^2+2y^4-4y^2-2x^2-2y^2+4$

$x^2\left(x^2+y^2-2\right)+2y^2\left(x^2+y^2-2\right)-2\left(x^2+y^2-2\right)$

$\left(x^2+y^2-2\right)\left(x^2+2y^2-2\right)$

La fattorizzazione ci permette infatti di determinare gli zeri e il segno della funzione, come mostrato in figura 4, dove è riportato anche ∂K, il quadrato di centro $(0,0)$, vertici lungo gli assi e diagonale 4.

La funzione, continua su tutto il piano perché somma di funzioni elementari continue, è positiva all'interno dell'ellisse $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, all'esterno della circonferenza $x^2+y^2=2$ e negativa nella regione intermedia. Osserviamo per il teorema di Weierstrass la funzione nella regione compresa fra ellisse e circonferenza assume sicuramente un valore che risulta essere il suo minimo assoluto, mentre, dato che $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)=+\infty$, avremo $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$. Infatti

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\left(\rho^2-2\right)\left(\rho^2+\rho^2\sin^2\theta-2\right)\ge\left(\rho^2-2\right)^2\to+\infty.$$

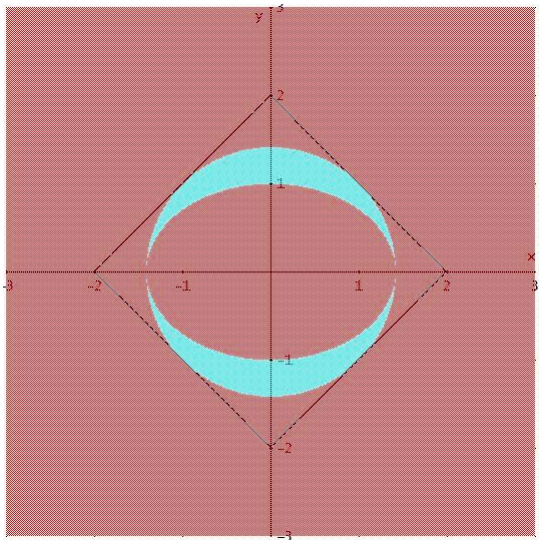


figura 4

Il gradiente è $\nabla f(x,y)=\left(2x\left(2x^2+3y^2-4\right),2y\left(3x^2+4y^2-6\right)\right)$ e si annulla nei punti:

- il punto $(0,0)$ che dal grafico del segno sappiamo essere un punto di massimo relativo, con $f(0,0)=4$;
- i punti $\left(\pm\sqrt{2},0\right)$ che dal grafico del segno sappiamo essere punti di sella;
- i punti $\left(0,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ che cadono all'interno tra la circonferenza e l'ellisse e quindi devono essere i punti di minimo assoluto che stiamo cercando:
  $f\left(0,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-\frac{1}{2}=\min_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$..

Abbiamo così individuato, ovviamente, anche $\min_K f(x,y)$. Resta invece da cercare il valore massimo, perché non è affatto detto che si tratti del punto di massimo relativo nell'origine.

Vediamo come prima cosa i valori della funzione sui vertici del quadrato: $f(\pm2,0)=4$ e $f(0,\pm2)=12$.

Per l'elevata simmetria dell'insieme K basta parametrizzare un lato del quadrato e calcolare la funzione lungo questo. Sul segmento da $(-2,0)$ a $(0,2)$, sulla retta $y=x+2$ la funzione diventa $f(x,x+2)=g(x)=6x^4+28x^3+50x^2+40x+12$, con derivata prima

$g'(x)=24x^3+84x^2+100x+40$. La derivata si annulla solo per $x=-1$, che è interno all'intervallo di nostro interesse, ma risulta corrispondere al punto in cui il bordo dell'insieme *K* è tangente alla circonferenza lungo la quale la funzione assume valore nullo. Non si tratta quindi del massimo che cerchiamo, che deve quindi essere $f(0,\pm2)=12=\max_K f(x,y)$.

5. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y)=x^2y^2$ determinate il massimo e il minimo assoluti di f sull'insieme $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2=1\}$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$\text{dom } f=\mathbb{R}^2$ e $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$. La funzione è non negativa, $\inf_{\mathbb{R}^2} f=\min_{\mathbb{R}^2}=0$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$.

$\nabla f(x,y)=(2xy^2,2x^2y)$ e quindi $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2xy^2=2\lambda x \\ 2x^2y=8\lambda y \\ x^2+4y^2=1 \end{cases}$$

Le soluzioni con $\lambda=0$ sono soluzioni banali: sono i punti di intersezione del vincolo con gli assi dove la funzione assume il suo valore minimo assoluto.

Se invece $x\neq 0\wedge y\neq 0$ il sistema si può scrivere, dopo aver semplificato, come $\begin{cases} y^2=\lambda \\ x^2=4\lambda \\ 8\lambda=1 \end{cases}$

$\lambda=\frac{1}{8}$ $x^2=\frac{1}{2}$ $y^2=\frac{1}{8}$, quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

In corrispondenza la funzione assume il valore $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$.

Concludendo:

$$\max_E f(x,y)=\frac{1}{16}=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\min_E f(x,y)=\min_{\mathbb{R}^2} f(x,y)0=f\left(0,\frac{1}{2}\right)=f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=f(1,0)=f(-1,0).$$