

Bolzano-Weierstrass e Cauchy

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Da ogni successione limitata si può sempre estrarre una sottosuccessione convergente, quindi che ha limite reale.

Si sa che se una successione è convergente, allora è limitata (non vale sempre il contrario).

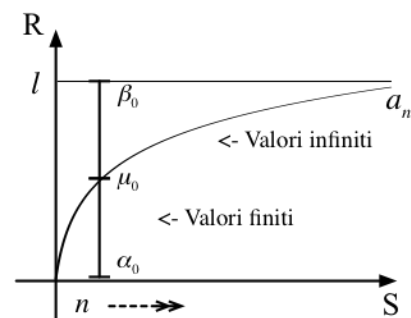
Dimostrazione

Per la dimostrazione si fa uso di:

- Teorema carabinieri
- Esistenza limite successioni monotone
- Principio induzione
- Argomento di bisezione
- $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ str. cresc. $\Rightarrow k(n) \geq n \forall n$
- A_n inf. $\exists k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ str. cresc. : $k(n) \in A_n \forall n$

Supponiamo di avere una successione di numeri reali limitata (ha maggioranti e minoranti), trovo un punto medio (μ) tra l'inizio (α_0) e la fine (β_0), so che in almeno uno dei sottoinsiemi stanno infiniti punti, quindi lo si considera e lo si divide in due a sua volta, e così via.

Ogni volta che si divide a metà l'intervallo, si estrae una sottosuccessione, che continua ad avere come limite lo stesso della successione di origine.



Si ha una successione $\{a_n\}_n$ limitata, trovo l'intervallo iniziale:

$$\exists \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}, \quad (\alpha_0 < \beta_0) : \alpha_0 \leq a_n \leq \beta_0 \quad \forall n$$
$$I_0 = [\alpha_0, \beta_0], \quad A_0 = \{m : a_m \in I_0\}$$

Sappiamo che A_0 è infinito, $A_0 \in \mathbb{N}$, è costituito da tutti i punti della semiretta che definiscono la successione.

Il punto medio viene definito:

$$\mu_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$$

L'insieme A_0 si può considerare come la unione di due insiemi delimitati da μ_0 :

$$A_0 = \{m : a_m \in [\alpha_0, \mu_0]\} \cup \{m : a_m \in [\mu_0, \beta_0]\}$$

Uno dei due insiemi è infinito, mentre l'altro non lo è. Se il primo è infinito, allora $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 = \mu_0$, altrimenti $\alpha_1 = \mu_0$, $\beta_1 = \beta_0$, creando l'intervallo I_1 e l'insieme A_1 .

Se si trova che A_1 è infinito:

$$\mathcal{P}(1) = \begin{cases} \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \\ A_1 \text{ infinito} \\ \beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} \end{cases}$$

Si ripete la procedura, e dopo n ripetizioni:

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_2 \\ A_n \text{ infinito} \\ \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \end{cases}$$

Va dimostrato tramite induzione che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n$, quindi se è vera $\mathcal{P}(n)$ allora deve essere vera anche $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\alpha_n < \mu_n < \beta_n, \quad \mu_n = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}$$

Considerando il caso generale, A_n è infinito:

$$A_n = \{m : a_m \in [\alpha_n, \mu_n]\} \cup \{m : a_m \in [\mu_n, \beta_n]\}$$

Si seleziona α_{n+1} e β_{n+1} a seconda dell'insieme, $I_{n+1} = [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$, l'insieme A_{n+1} quindi risulta infinito per costruzione:

$$A_{n+1} = \{m : a_m \in I_{n+1}\}$$

Dovendo verificare $\mathcal{P}(n+1)$ in modo che possa essere vera $\forall \mathcal{P}(n)$:

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{n+1}}$$

Il risultato è sicuramente positivo, quindi il primo è maggiore del secondo, quindi il principio di induzione vale, la proprietà è vera $\forall n$.

Si deve trovare una sottosuccessione k_n che converge al limite l , se dimostriamo che le due successioni $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ convergono allo stesso limite, allora converge anche k_n dato che è in mezzo alle altre due (carabinieri).

$\{\alpha_n\}_n$ - Debamente crescente, ha limite per la esistenza del limite di una successione monotona, che può essere $+\infty$ o l'estremo superiore, ma $\forall n, \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_0$ quindi può solo convergere a un valore $l \in \mathbb{R}$.

$\{\beta_n\}_n$ - Debolmente decrescente, è delimitato inferiormente e ha limite, dato che $\beta_n = \alpha_n + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{n+1}}$, dove $\alpha_n \rightarrow l$ e $\frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{n+1}}$ è infinitesimo, quindi il tutto tende a l .

Definiamo una successione $\{a_{k_n}\}_n$:

$k_n \leq A_n, \forall n$, quindi i punti sono bloccati nell'intervallo $a_{k_n} \in I_n \forall n$, per il teorema dei carabinieri la sottosuccessione ha limite l , dato che:

$$\alpha_n \rightarrow l, \quad \beta_n \rightarrow l, \quad \alpha_n \leq a_{k_n} \leq \beta_n$$

È stata estratta una qualunque sottosuccessione, ed è provato che ha sempre limite l , dimostrato. ■

Teorema di Cauchy

Una successione di numeri reali $\{a_n\}_n$ si dice di Cauchy se “oscilla progressivamente sempre meno”, quindi è convergente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n}_\varepsilon : \forall n, m \geq \bar{n}_\varepsilon |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Vale anche il contrario, se una successione di numeri reali è convergente, allora è di Cauchy. Nota che viene specificato che la successione deve essere di numeri reali, altrimenti potrebbero esistere successioni di Cauchy che non convergono.

Dimostrazione

Una successione di numeri reali converge se e solo se è di Cauchy.

Sia a_n una successione convergente ad un limite l , quindi con i punti che si avvicinano sempre di più tra di loro: $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Prendendo due indici, si stima la distanza; se $n, m \geq \bar{n}$ vediamo che stanno vicini, dato che la distanza tra a_m e a_n è il valore assoluto della differenza:

Si impone l all'interno del calcolo della distanza, divido, eseguo diseg. triang.:

$$\begin{aligned} \text{Distanza: } |a_n - a_m| &= |(a_n - l) + (l - a_m)| \\ |(a_n - l) + (l - a_m)| &\leq |a_n - l| + |a_m - l| \end{aligned}$$

Gli ultimi due termini presi individualmente sono più piccoli di $\frac{\varepsilon}{2}$, quindi sommati sono minori di ε .

La distanza tra due punti nella coda della oscillazione è infinitesima, quindi vale la proprietà di Cauchy $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n}_\varepsilon : \forall n, m \geq \bar{n}_\varepsilon |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Dimostrazione

Se una successione di **numeri reali** è di Cauchy, allora è convergente.

$$\text{HP: } \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n}_\varepsilon : \forall n, m \geq \bar{n}_\varepsilon |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 &\leadsto \bar{n}_1 : \forall n \geq \bar{n}_1, |a_n - a_{\bar{n}_1}| < 1 \\ a_{\bar{n}_1} - 1 &< a_n < a_{\bar{n}_1} + 1 \end{aligned}$$

Il primo termine della catena di disuguaglianze si considera α , l'ultimo β , si applica il teorema di Bolzano-Weirstrass, quindi è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a $l \in \mathbb{R}$:

$$\exists \{a_{k_n}\}_n \rightarrow l$$

Tutta la successione converge a l . Fissato $\varepsilon > 0$, e dato che la sottosuccessione converge:

$$\exists \hat{n}_\varepsilon : \forall n > \hat{n}_\varepsilon, |a_{k_n} - l| < \varepsilon$$

La successione è di Cauchy, vale che:

$$\begin{aligned} \exists \bar{n}_\varepsilon : \forall n, m \geq \bar{n}_\varepsilon |a_n - a_m| &< \varepsilon \\ \tilde{n}_\varepsilon &= \max\{\hat{n}_\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\text{Se } n \geq \tilde{n}_\varepsilon, \forall k_n \geq n \geq \hat{n}_\varepsilon \Rightarrow |a_{k_n} - l| < \varepsilon$$

$$k_n \geq \bar{n}_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$$

Si applica la disuguaglianza triangolare:

$$|a_n - l| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - l)| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l|$$

Per la proprietà del limite di

$$|a_n - a_{k_n}| < \varepsilon, \quad |a_{k_n} - l| < \varepsilon$$

Quindi la somma è minore di 2ε , quindi tutta la successione $a_n \rightarrow l$.