

Derivate

Proprietà di differenziabilità

Si dice una funzione f differenziabile in $x_0 \in \text{acc } A$ se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$.

Il numero α viene chiamato **differenziale di f nel punto x_0** .

Rapporto incrementale

Per una funzione f in un punto x_0 :

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Indica il rapporto tra la distanza sull'ordinata e la distanza sull'ascissa di due punti. In pratica è il coefficiente angolare.

Derivata

La derivata intuitivamente indica come cambia una funzione continua in un determinato punto. È il **limite del rapporto incrementale**, indica come sta cambiando la funzione in un intervallo "infinitamente piccolo".

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Viene indicata con i simboli:

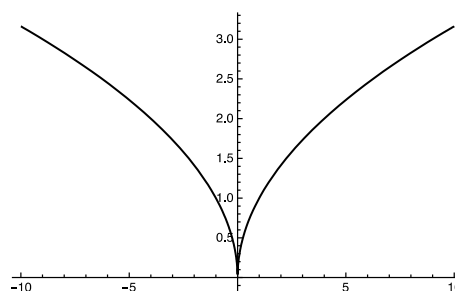
$$f', \quad Df, \quad \frac{d}{dx}f, \quad f^{(1)}$$

Si dice che f è **derivabile** in un punto x_0 se la derivata (quindi il limite) esiste ed è finita, ed è derivabile in un insieme, se e solo se è derivabile in ogni suo punto.

Dal punto di vista geometrico è la pendenza della funzione in un determinato punto, ossia la tangente.

Osservazione

La derivata di una funzione può essere infinita nei punti in cui ha pendenza massima. Un esempio può essere $\sqrt{|x|}$.



Inoltre se si prende una funzione discontinua in cui se $x < 0, f(x) = 0$ e $x \geq 0, f(x) = 1$ si ha che in 0 la derivata vale ∞ , non ha senso in questo caso.

Derivata destra, sinistra

Si può definire la derivata da destra o da sinistra, cambia come arriva il limite, in un caso tende a x_0^- , nell'altro caso a x_0^+ . Esistono funzioni che in un punto sono continue ma non derivabili dato che il limite destro non corrisponde al limite sinistro, per esempio $|x|$ (detto anche punto angoloso).

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} R_{x_0}(x)$$

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} R_{x_0}(x)$$

Regole fondamentali

Per la derivazione:

$$x^\alpha \rightarrow \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\text{da questa deriva radice})$$

$$\sqrt[n]{x} \rightarrow \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$|x| \rightarrow \operatorname{sgn} x \quad (\text{è solo } +1 \text{ o } -1)$$

$$\sin x \rightarrow \cos x \quad (\text{traslazione orizzontale})$$

$$\tan x \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\log_a x \rightarrow \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad (\text{normalmente è solo } \frac{1}{x})$$

$$a^x \rightarrow a^x \cdot \log a \quad (\text{non vale per composizione funzioni})$$

$$e^{-x} \rightarrow -e^{-x}$$

$$\arcsin x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

Per le operazioni:

Costante: $k \cdot f(x)$

Somma: $f(x) + g(x)$ basta derivare le funzioni.

Prodotto: $f(x) \cdot g(x) \rightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Divisione: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$

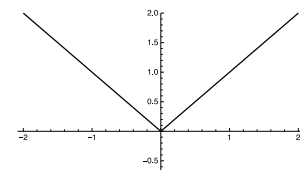
Composizione: $f(g(x)) \rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Punti non derivabili

Sono punti in cui non si può calcolare la derivata, quindi dove la derivata destra non è uguale alla derivata sinistra, oppure dove la derivata assume valori particolari.

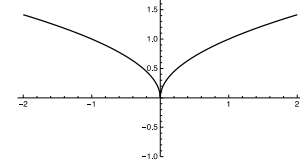
Punto angoloso

È un punto in cui una funzione non è derivabile, ma esiste derivata destra e sinistra, sono reali e non uguali. Per esempio $f(x) = |x|$ in 0 presenta un punto angoloso.



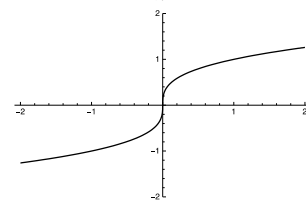
Punto cuspidale

Quando la derivata è uguale a $+\infty$ oppure $-\infty$, per esempio per $\sqrt{|x|}$.



Punto di flesso a tangente verticale

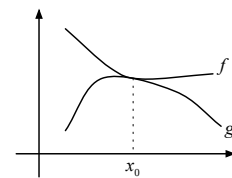
La funzione è continua nel punto x_0 , ma non è derivabile, la derivata destra è l'opposto di quella sinistra ed entrambe sono $\pm\infty$. Per esempio $x^{\frac{1}{3}}$.



Proprietà di funzioni derivabili

Località

Se due funzioni f e g sono coincidenti in un intorno δ di un punto x_0 , se f è derivabile in x_0 allora anche g è derivabile in x_0 .



Monotonia

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad f \text{ crescente}$$

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad f \text{ deb. crescente}$$

f crescente, derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) > 0$.

f decrescente, derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) < 0$.

Formula di Leibniz

È la formula che dice come calcolare la derivata n-esima del prodotto di due funzioni.

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

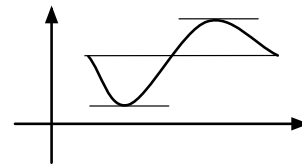
Teorema di Fermat

Sia x_0 un punto di massimo [[minimo]] locale interno per f in cui f è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle

Si ha una funzione f :

- Ha dominio in $[a, b]$
- È regolare
- Stesso valore agli estremi
- Continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$



Allora $\exists z \in]a, b[: f'(z) = 0$. Una funzione che va da un punto ad un altro con la stessa quota ha sicuramente almeno un minimo e/o un massimo locale, dove per il teorema di Fermat la derivata prima è 0.

Dimostrazione

Si cercano punti di minimo e massimo locale interni, ce lo garantisce il teorema di Weierstrass. Una funzione costante ($M = m$) è ovviamente $f' = 0$.

Se $m < M$, allora i punti non possono essere agli estremi dell'intervallo. Se $x_0 \in]a, b[$, allora $f(x_0) = M$.

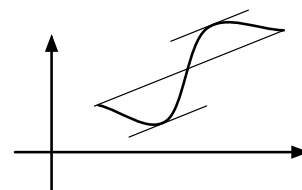
f è derivabile in x_0 , quindi per il teorema di Fermat $f'(x_0) = 0$.

Corollario

Per contronominale, se f è continua su $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, tale che $f'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$ allora $f(a) \neq f(b)$.

Teorema di Lagrange

È come il teorema di Rolle, ma elimina l'ipotesi che gli estremi devono essere uguali. Invece che 0, esiste sicuramente almeno un punto in cui la derivata è uguale alla pendenza della retta che passa per i due punti.



Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$:

$$\exists z \in]a, b[: f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si trova sempre in un intervallo almeno una tangente parallela alla secante dei due punti.

Dimostrazione

Per dimostrare il teorema si “raddrizzano” i due punti per farlo ricondurre al teorema di Rolle. Si introduce quindi la funzione affine r .

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$
$$r(a) = f(a), \quad r(b) = f(b)$$

$$r'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sia $h(x) = f(x) - r(x)$, allora $h(x)$ verifica Rolle, quindi:
 $\exists z \in]a, b[: h'(z) = 0$

Ma $h'(x) = f'(x) - r'(x) \forall x \in]a, b[$
 $f'(z) = r'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Derivata seconda

Si ottiene dalla derivazione della derivata. Si può rappresentare con i simboli:

$$f'', \quad D^2 f, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(2)}$$

Intuitivamente indica come cambia la derivata.

Esempio

$$f: \sin x \rightarrow f': \cos x \rightarrow f'': -\sin x$$

Massimo o minimo locale

Se in un punto $f'(0) = 0$ e $f''(x) \neq 0$, allora riusciamo a decidere se il punto è massimo o minimo locale.

Se $f''(x) > 0$, allora il punto è minimo locale.

Se $f''(x) < 0$, allora il punto è massimo locale.

Derivata della funzione inversa

Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **biunivoca** e **derivabile in un punto** x_0 , allora la funzione inversa è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$, e la derivata è uguale a:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Teorema di Cauchy

Siano f e g continue su $[a, b]$, e derivabili in $]a, b[$, allora $\exists c \in]a, b[$ t. che:
 $[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)$

Se $g'(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$ (tutta crescente o tutta decrescente), allora si può dividere:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Indicando che esiste un punto in cui il rapporto fra gli incrementi è uguale al rapporto fra le derivate.

Si utilizza per dimostrare il teorema di De L'Hôpital.

Teorema di De L'Hôpital

Siano due funzioni f e g continue in $[x_0, b]$ e derivabili in $]x_0, b[$ con $f(x_0) = g(x_0) = 0$, quindi partono entrambe dallo stesso punto nullo. (nota del professore, tutte le forme indeterminate sono uguali, quindi oltre che per $\frac{0}{0}$ vale anche per $\frac{\infty}{\infty}$)

Si vuole calcolare il limite, ma questo porterebbe ad avere una FI:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = [FI]$$

Il teorema di de l'Hôpital ci dà un altro limite da calcolare, se questo funziona, allora il risultato vale per il primo:

$$\lim_{(x \rightarrow x_0)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Da notare che il teorema non funziona se non c'è una forma indeterminata, inoltre è inutile da applicare se la derivata è troppo complessa.

Dimostrazione

$$\text{HP: } \forall V \in \mathcal{I}, \exists \delta > 0 : \forall w \in]x_0, x_0 + \delta[, \frac{f'(w)}{g'(w)} \in V$$

$$\text{TH: } \forall V \in \mathcal{I}, \text{ se } \exists \delta > 0 : x \in]x_0, x_0 + \delta[, \frac{f(x)}{g(x)} \in V$$

Si può scrivere, dato che nel punto x_0 entrambe sono 0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Si può applicare nell'intervallo $[x_0, x]$ il teorema di Cauchy, quindi c'è un punto c tale che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in V$$

Quindi:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in V$$

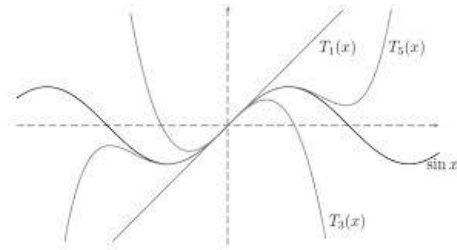
Teorema di Taylor (resto di Peano)

Sia f derivabile più volte in un intorno di x_0 ($= 0$ per comodità), poniamo per $k = 0 \dots n$, $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, dove per $f^{(k)}$ si intende la derivata di ordine k .

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

Allora:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$



Si tratta della formula di Taylor centrata in 0 di ordine n con resto di Peano. Con questo si dimostrano gli sviluppi di Taylor. Dal punto di vista pratico crea una approssimazione della funzione tramite un polinomio, in cui si può scegliere quanto avvicinarsi alla funzione (l'ordine dello sviluppo) e cosa lasciare come errore (o piccolo).

Teorema di Taylor (resto di Lagrange)

Esistono casi in cui gli o piccoli non sono sufficienti per determinare come si comporta una funzione vicino allo zero, per esempio nel caso di una funzione che in 0 ha tutte le derivate uguali a 0 (quindi rallenta con una dolcezza infinita), creando un infinitesimo di ordine "infinito". Il resto di Peano non serve in questo caso, dice che la funzione somiglia a 0, ma non dice quanto è piccola.

Il resto di Lagrange permette di avere un risultato più completo, a scapito della semplicità dei calcoli.

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Si ha un polinomio di ordine 0 più un oggetto ξ di ordine 1 che dipende in modo sconosciuto da x .

$\exists \xi$ tra x_0 e x t. che:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Tutto quello che si legge dopo $P_n(x)$ è il resto di Lagrange.

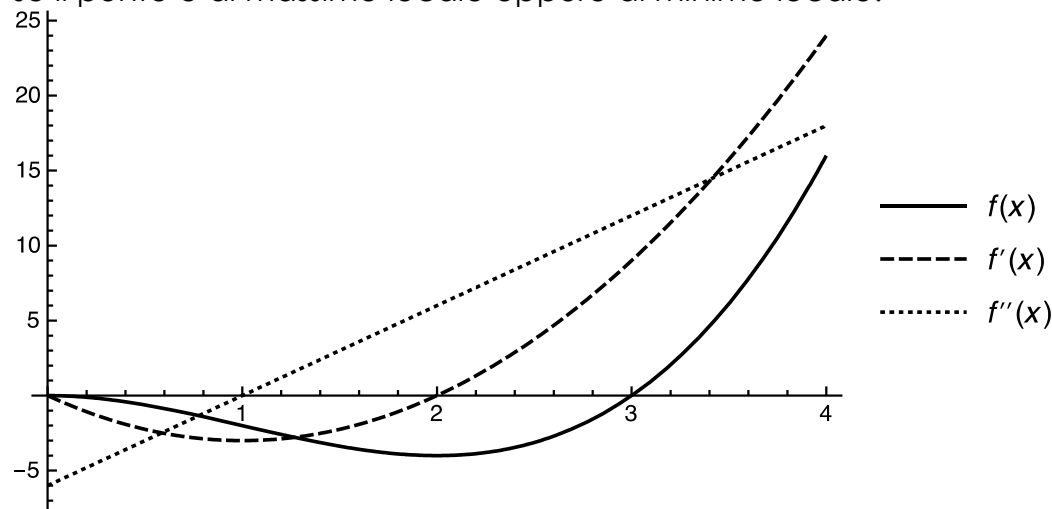
Minimo e massimo locale

Sia f una funzione derivabile in un intorno di x_0 , con $f'(x_0) = 0$, se $f''(x_0) \neq 0$, allora:

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min. locale
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max. locale

Questo perchè la derivata prima indica se la funzione cresce o decresce, se è 0 allora la funzione è massimo o minimo locale, e come

procederà la derivata prima (indicato dalla derivata seconda) indica se il punto è di massimo locale oppure di minimo locale.



Funzioni definite a tratti

Per vedere se una funzione definita a tratti è derivabile in un punto critico, basta verificare che la derivata da destra sia uguale alla derivata da sinistra, altrimenti potrebbe trattarsi di un punto angoloso o di cuspide. Ovviamente deve essere continua in quel punto.

Esempio

Ci si chiede per quali valori la funzione definita a tratti è derivabile in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3 \cos x - 2e^x, & x \geq 0 \\ ax + \frac{b}{1+x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Innanzitutto per essere derivabile in 0 deve essere continua, si verifica con il limite da destra e da sinistra:

$$f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(ax + \frac{b}{1+x^2} \right) = b \text{ (tende a } b \text{)}$$

Se si vuole che siano continue, i limiti da sx e dx devono coincidere, quindi se $b \neq 1$ la funzione non è continua, quindi non è derivabile in quel punto, mentre se $b = 1$, allora forse è derivabile.

$$f'(x) = \begin{cases} -3 \sin x - 2e^x, & x > 0 \\ a - \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x, & x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che nel primo caso, per il punto 0, la derivata prima è uguale a -2 , mentre nella seconda è uguale a a .

$$f'_+(0) = -2, \quad f'_-(0) = a$$

Allora è derivabile in 0 se $b = 1$ e $a = -2$.