

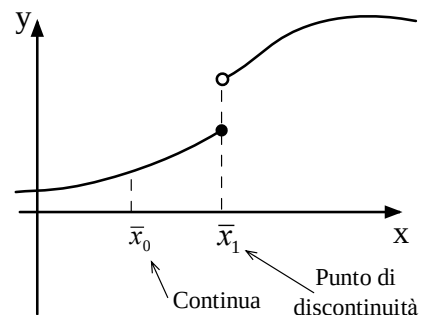
Funzioni Continue

Sono funzioni che ad ogni coppia di punti nel dominio sempre più vicini corrispondono punti nel codominio sempre più vicini.

Definizione

Le funzioni continue si definiscono con le successioni:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in A$$

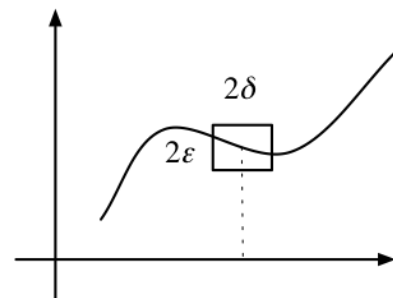


La funzione f è continua su $\bar{x}$ se vale una delle proprietà:

1. $\forall (x_n)_n \in A, x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} \in A, |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$
3. $\forall V \in \mathcal{I}f(\bar{x}), \exists U \in \mathcal{I}\bar{x} : \forall x \in U \cap A, f(x) \in V$

I punti (2) e (3) sono equivalenti, e per dimostrare (1) e (3) si usa la contronominale, $\neg 3 \Rightarrow \neg 1, \neg 1 \Rightarrow \neg 3$.

Per la definizione (2) si può concettualmente pensare come un rettangolo di larghezza 2δ e altezza 2ε che scorre lungo la funzione, e si sa che la funzione non deve mai toccare il lato superiore e quello inferiore. Questo vuol dire che una funzione discontinua non verificherebbe mai questa proprietà, anche per $\delta \rightarrow 0$, altrimenti sarebbe continua in quel punto.



A questo punto la definizione (3) è equivalente alla (2), solo che usa degli intervalli al posto di δ e ε (nota, nel grafico si usa 2δ perchè δ indica la distanza dal punto, quindi in una direzione e nell'altra).

Si dice che la funzione f è continua se la è su tutto il dominio:
 $\forall \bar{x} \in A, \text{cont.}$

Esempio

$f(x) = |x|$ è continua, dimostrata con la disuguaglianza triangolare:

$$||x_n| - |\bar{x}|| \leq |x_n - \bar{x}|$$

Il secondo membro ha limite che tende a 0, quindi:

$$|x_n| \rightarrow |\bar{x}|$$

Applicazioni

Continuità di funzioni polinomiali

Ogni funzione polinomiale $f(x) = P(x)$ è continua.

Dimostrazione

Un polinomio è continuo perchè la somma di monomi continui risulta una funzione continua (teorema del limite della somma).

Un monomio x^P è continuo perchè la potenza $\forall n \in \mathbb{N} x^n$ è continua grazie al teorema del limite del prodotto, dato che $x^n = x \cdot x \cdot \dots n \text{ volte}$.

Continuità della somma e del prodotto

Se due funzioni f, g sono continue in $\bar{x}$, allora anche $f + g, f \cdot g, k \cdot f$ sono continue in $\bar{x}$ grazie ai teoremi sui limiti.

Continuità del reciproco

Se g è continua in $\bar{x}$ e $g(\bar{x}) \neq 0$ allora $\frac{1}{g}$ è continua in $\bar{x}$ per il teorema del limite del reciproco.

Quindi per la proprietà del prodotto e del reciproco, se f è continua in $\bar{x}$, allora $\frac{f}{g}$ è continua in $\bar{x}$.

Continuità di composizioni

Se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $y = f(\bar{x})$, allora $g \circ f$ è continua in $\bar{x}$.

$$\{x_n\}_n \subset \text{dom}(g \circ f)$$

$$x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

$$x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(\bar{y})$$

$$x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(\bar{x}))$$

Continuità di funzioni goniometriche

Le funzioni seno, coseno, tangente sono continue.

Dimostrazione

Si vuole dimostrare che $\sin x$ e $\cos x$ sono continue.

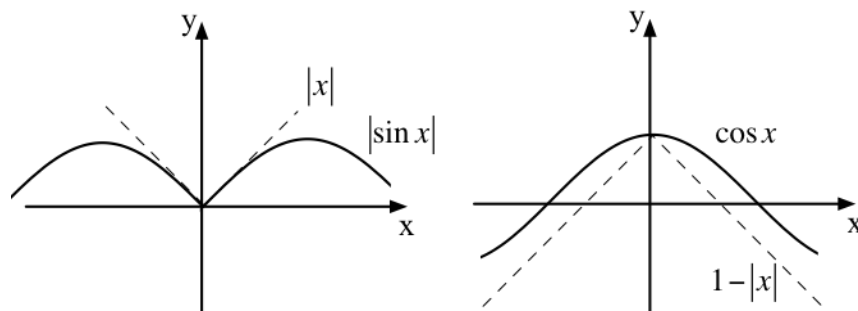
$$\text{TH: } \forall \{x_n\}_n \in \mathbb{R} : x_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sin x_n \rightarrow 0 = \sin 0$$

$$\Rightarrow \cos x_n \rightarrow 1 = \cos 0$$

Dimostriamo che le funzioni sono continue in 0:

$$\forall x, \quad 0 \leq |\sin x| \leq |x|, \quad 1 - |x| \leq \cos x \leq 1$$



Per il teorema dei carabinieri, all'avvicinarsi a 0 in entrambe le direzioni, $\cos x_n \rightarrow 1$.

Ora si dimostra che sono continue al di fuori dello 0:

$$\bar{x} \neq 0, \quad x_n \rightarrow \bar{x}, \quad d_n = x_n - \bar{x}, \quad d_n \rightarrow 0 \\ \Rightarrow x_n = \bar{x} + d_n$$

Dobbiamo far vedere che:

$$\sin(x_n) \rightarrow \sin \bar{x}, \quad \cos(x_n) \rightarrow \cos \bar{x}$$

Si usa la formula della somma:

$$\sin(x_n) = \sin(\bar{x} + d_n) = \sin \bar{x} \cdot \cos(d_n) + \cos \bar{x} \cdot \sin(d_n)$$

$$\cos(d_n) \rightarrow 1, \quad \sin(d_n) \rightarrow 0$$

$$\text{Quindi } \sin(x_n) \rightarrow \sin \bar{x}$$

Stessa cosa con il coseno:

$$\cos(x_n) = \cos(\bar{x} + d_n) = \cos \bar{x} \cdot \cos(d_n) - \sin \bar{x} \cdot \sin(d_n)$$

$$\cos(d_n) \rightarrow 1, \quad \sin(d_n) \rightarrow 0$$

Per dimostrare la tangente, basta notare che è il rapporto tra seno e coseno, per il teorema sul limite del reciproco è continua se $\cos x \neq 0$ (altrimenti la funzione non è definita).

Continuità della funzione potenza

La funzione potenza x^k è continua $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\forall (x_n)_n, x_n \rightarrow +\infty, \text{ allora } \begin{cases} x_n^k \rightarrow +\infty, & k > 0 \\ x_n^k \rightarrow 0^+, & k < 0 \end{cases}$$

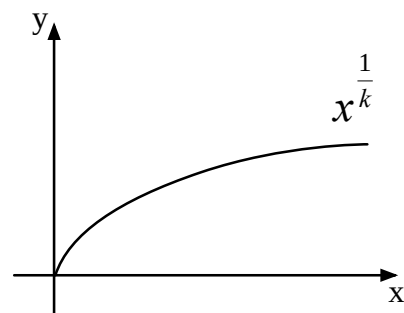
Continuità della funzione radice

Considerando $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $x^{\frac{1}{k}}$ è continua.

Per conseguenza del teorema di continuità della funzione inversa (vedi dopo).

$$\forall (x_n)_n, x_n \rightarrow +\infty, \text{ allora } \begin{cases} x_n^{\frac{1}{k}} \rightarrow +\infty, & k > 0 \\ x_n^{\frac{1}{k}} \rightarrow 0^+, & k < 0 \end{cases}$$

$$\forall (x_n)_n, x_n \rightarrow +0^+, \text{ allora } \begin{cases} x_n^{\frac{1}{k}} \rightarrow +0^+, & k > 0 \\ x_n^{\frac{1}{k}} \rightarrow +\infty, & k < 0 \end{cases}$$



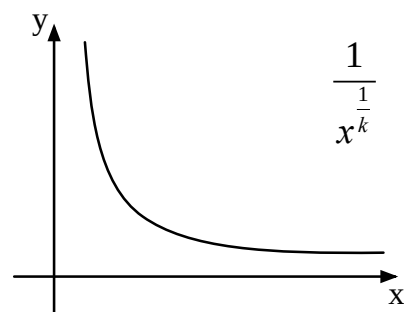
Dimostrazione 1

def $x_n > 0$

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0^+, \quad \varepsilon > 0, \text{ def } 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon^k$$

$x_n^{\frac{1}{k}}$ cresc. su $\mathbb{R}$

$$\text{def } 0 < \frac{1}{x_n^{\frac{1}{k}}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x_n^{\frac{1}{k}}} \rightarrow 0^+$$



Eseguendo il reciproco:

$$x_n^{\frac{1}{k}} \rightarrow +\infty$$

Esempio

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Si usa la forma del quadrato di un binomio:

$$A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}$$

Ottenendo che la successione tende a 0.

Teoremi sulle funzioni continue

Permanenza del segno

Si ha una funzione f continua in $\bar{x}$, e $f(\bar{x}) \neq 0$, si ha che:

$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{I}_\delta(\bar{x}) \cap A, f(x) \text{ ha segno costante}$

Esiste un intervallo centrato in $\bar{x}$ con raggio $\delta > 0$ tale che per qualunque punto all'interno (deve essere parte del dominio A) la funzione ha segno costante. Questo dice che **se la funzione è continua in un punto (rispettate le condizioni) allora sono presenti altri punti vicini con lo stesso segno.**

Esistenza degli zeri

Uno zero di una funzione è un punto $\bar{x}$ dove $f(\bar{x}) = 0$, quindi una soluzione della funzione.

Se f è continua su un intervallo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ allora $\exists z[a, b] : f(z) = 0$. Il prodotto è minore o uguale di zero, allora può verificarsi una delle condizioni:

- Un termine è negativo e l'altra è positivo
- Un termine è 0

Osservazione

La proprietà è falsa su $\mathbb{Q}$ dato che è “bucherellato” e potrebbe non essere definita la funzione mentre passa per 0.

Dimostrazione

Si prendono i punti del dominio in cui è negativa:

$$A_- = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

L'insieme è non vuoto, limitato superiormente da z per il teorema di esistenza dell'estremo superiore.

Dimostriamo che in z si annulla (verifica la tesi):

$$z = \sup A, \quad z \in [a, b], \quad z > a, \quad b \in \mathcal{M}z$$

Si avrebbe assurdo se:

$f(z) > 0, z > a$, per la permanenza del segno:
 $\exists \delta > 0 : x \in]z - \delta, z[\Rightarrow f(x) > 0$
 Che contraddice che sia l'estremo superiore di A.

$f(z) < 0, z < b$:
 $\exists \delta > 0 : x \in]z, z + \delta[\Rightarrow f(x) < 0$
 $x \in A_-$, ma allora non sarebbe maggiorante, assurdo.

Dato che le due ipotesi sono assurde, allora può essere solo che $f(z) = 0$ ■

Corollario – Importante

Se g è continua su un intervallo $[a, b]$ e $g(a) \leq k \leq g(b)$, allora:

$$\exists z \in [a, b] : f(z) = k$$

Quindi il grafico della funzione deve attraversare k in almeno un punto.

Valori intermedi

Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua sull'intervallo I , allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo J di estremi $l = \inf_I f$, $L = \sup_I f$.

Dimostrazione

$$J = f(I) = \{f(z) : z \in I\}$$

$$l = \inf J, \quad L = \sup J$$

TH: Dobbiamo far vedere che J è un intervallo, quindi:

$$\forall \alpha, \beta \in J, \alpha < \beta, \forall k \in]\alpha, \beta[, k \in J$$

$$\exists a, b \in J : f(a) = \alpha, f(b) = \beta$$

Supponiamo che $a < b$, $g = f|_{[a,b]}$, si vuole applicare il corollario di prima (se è continua in un intervallo comprendente un punto z , allora passa per $f(z) = k$).

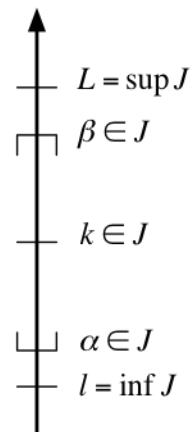
Se I è un intervallo, allora $[a, b] \subset I$. In ogni punto di $[a, b]$ la funzione è continua, quindi $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

$$g(a) = f(a) = \alpha < k < \beta = f(b) = g(b)$$

$$\exists z \in [a, b] \subset I : g(z) = k \rightsquigarrow \exists x \in I : f(z) = k \rightsquigarrow k \in f(I) = J$$

$$]l, L[\subset f(I) \subset [l, L]$$

Essendo tutto l'intervallo contenuto in J allora è dimostrata.



Teorema di Weierstrass

Una funzione f **continua** in un intervallo I del dominio è continua in un intervallo J del codominio. Un intervallo chiuso e limitato nel dominio produce un intervallo chiuso e limitato nel codominio.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *cont. su $[a, b]$ int. chiuso e lim.*, allora f ha minimo e massimo.

Dimostrazione

Nota: per la dimostrazione del minimo si procede allo stesso modo.

Esiste l'estremo superiore per il teorema di esistenza del suddetto.

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

L'estremo superiore M può essere un numero reale oppure infinito:

1. $\exists y_n \in f([a, b]) : y_n > n \in \mathbb{N}$ (infinito)
2. $\exists y_n \in f([a, b]) : y_n > M - \frac{1}{n}$ (limitato)

In entrambi i casi la successione $\{y_n\}_n : y_n \rightarrow M$ (tende a M).

$$\forall n, \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n \Rightarrow f(x_n) \rightarrow M$$

Si considera la successione associata $\{x_n\}_n \subset [a, b]$, l'intervallo è chiuso e limitato, quindi la successione è limitata, quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{x_n\}_n$ convergente a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Essendo $[a, b]$ un intervallo chiuso, allora $\bar{x} \in [a, b]$, f è continua in $\bar{x}$, allora $f(x_{kn}) \rightarrow f(\bar{x}) \Rightarrow y_{kn} \rightarrow f(\bar{x})$.

Se una successione ha limite, allora ogni sottosuccessione ha limite, allora $M = f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, quindi f è limitata superiormente e $M = \max_{[a,b]} f$.

Massimo e minimo in un intervallo aperto

$$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ cont.}, \quad \exists l_a = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad \exists l_b = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Bisogna concludere se la funzione ha massimo e minimo, e quanto valgono. Si considerano i casi:

1. $l_a \neq l_b$ – Non si può concludere.
2. $l_a = l_b = +\infty$ – Non ha massimo, ma ha minimo.
3. $l_a = l_b = -\infty$ – Non ha minimo, ma ha massimo.
4. $l_a = l_b \in \mathbb{R}$ – Esiste almeno il massimo o il minimo

Considerando l'ultimo caso, se f non è costante, $\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) \neq l_a \wedge l_b$, se si trova un punto in cui $f(x_0) > l$, allora la funzione ha massimo, viceversa per il minimo. Quindi se una funzione non è costante, possono esistere il massimo, il minimo o entrambi.

Funzioni uniformemente continue

Si tratta di una proprietà di una funzione, che viene chiamata uniformemente continua se è continua e la variazione di $f(x)$ dipende solo dalla variazione di x , ma **non dal punto stesso**. Per qualunque punto nel dominio, spostandosi di δ non si avrà mai uno spostamento nel codominio maggiore di ε . Questo non dipende dalla derivata, indica solo che esiste un caso peggiore possibile di spostamento su y rispetto ad uno spostamento su x . Essendo una proprietà globale non ha senso dire che una funzione è uniformemente continua in un punto.

Occorre che la scelta di δ non dipenda da $\bar{x}$, quindi deve dipendere solo da ε (per esempio non succede per x^2 , dato che più si va avanti più la funzione accelera, quindi ε diventa sempre più grande per uno spostamento costante δ). Si riveda l'esempio del rettangolo che segue l'andamento della funzione nella definizione di funzione continua, per una funzione di secondo grado per esempio si arriva ad un punto in cui δ continua a decrescere in modo infinitesimo; con una funzione simile non si può trovare un δ che possa andare bene per qualunque punto, ma continua a variare, **dipende dalla ascissa scelta**, se bassa il δ può essere grande, man mano che cresce il δ decresce, e non ne esiste uno valido per **ogni punto della funzione**. Questo distingue una funzione uniformemente continua da una funzione solo continua, la prima definizione è più forte.

Vale lo stesso la definizione, ma δ non deve dipendere da x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} \in \text{dom } f, |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Osservazione

Una funzione ristretta ad un intervallo è uniformemente continua, dato che esiste sempre un caso peggiore possibile.

Esempio

Sono funzioni uniformemente continue la retta, seno, coseno.

Funzioni affini

Si tratta di polinomi di primo grado, quindi sono funzioni uniformemente continue.

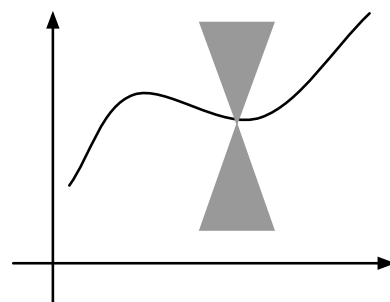
Funzioni lipschitziane

Una funzione si dice lipschitziana se esiste una costante $L \geq 0$ tale che:

$$\forall x, \bar{x} \in \text{dom } f, |f(x) - f(\bar{x})| \leq L \cdot |x - \bar{x}|$$

La minima (ottimale) tra le costanti L che verificano la proprietà si chiama **costante di Lipschitz** di f .

Nel grafico, la funzione non deve intersecare con le parti scure, i coefficienti angolari delle rette sono $\pm L$.



Osservazione

Ogni funzione lipschitziana è uniformemente continua.

La disuguaglianza serve per dare un controllo sulla pendenza della funzione in ogni punto.

Esempio

La funzione $\sqrt{|x|}$ ristretta nell'intervallo $[0, 1]$ è continua ed uniformemente continua, ma non può essere lipschitziana. Per fare in modo che la sia bisogna escludere un intervallo centrato in 0 (dove ha derivata “infinita”).

Questo fa vedere come la proprietà di lipschitzianità sia più forte della uniforme continuità.

Funzioni analitiche

Una funzione f si dice analitica in un intorno U di x_0 se $\forall \varepsilon > 0, \exists n :$

$$\sup_U |f - P_n(x)| < \varepsilon$$

Dove $P_n(x)$ rappresenta il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x , e la formula dice che ovunque ci si trovi nell'intervallo U , ci si sbaglia al massimo di ε .

Sono comode poichè fa in modo che in certe zone si possa utilizzare il polinomio al posto della funzione, essendo sufficientemente preciso.

Funzioni definite a tratti

Per vedere se una funzione definita a tratti è continua, bisogna calcolare il limite da destra e da sinistra nel punto critico. Se tendono allo stesso numero, allora è continua.

Funzioni generalmente continue

Una funzione f su un intervallo $[a, b]$ se è limitata ed è continua ma presenta un numero finito di punti di discontinuità (dove può anche non esistere), allora si definisce come generalmente continua.