

Limiti esponenziali

Numero di Nepero

Si tratta di una costante matematica importante per la funzione esponenziale e il logaritmo.

Si parte dalla definizione di due successioni:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\forall n, \quad 2 < e_n < 3 - \frac{1}{12}$$

Dimostrazione

Per definizione entrambe hanno limite che corrisponde a e . La successione è strettamente crescente ed è limitata superiormente da $3 - \frac{1}{12}$. Per la disuguaglianza di Bernoulli otteniamo che:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

E per il binomio di Newton:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

Per $k=0, k=1$ abbiamo 1, scambiamo n^k con $k!$:

$$e_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

Si ottiene quindi che:

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$
$$P_{k,n} = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

Quindi per $\forall n > 2$:

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} P_{k,n}$$

Osserviamo che se $2 \leq k \leq n$:

$0 < P_{k,n} < 1$ (tutti i fattori positivi e minori di 1)

$P_{k,n} < P_{k,n+1}$ per prop. monotonia (continua a crescere).

$$\left(1 - \frac{i}{n}\right) < \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)$$

Siccome $P_{k,n} < 1$, ogni addendo è più piccolo di $\frac{1}{k!}$:

$$b_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}, \quad \forall n \geq 2$$

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot P_{k,n} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n$$

$$e_n \leq b_n$$

Dato che $P_{k,n}$ cresce, si ottiene che anche e_n cresce:

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot P_{k,n} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot P_{k,n+1} = e_{n+1}$$

Essendo $e_n \leq b_n$ basta provare che $b_n < 3 - \frac{1}{12}$ per finire la dimostrazione. Si ha che per induzione:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k! \geq 2^{k-1}$$

Usando la formula sulla somma dei termini di una progressione geometrica si ha che per $n \geq 4$:

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{k!}$$

$$\sum_{k=4}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

Si vuole trovare un controllo che non dipenda dalla scelta di n :

$$h = k - n$$

$$\sum_{k=4}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{h=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^{h+3}$$

Estraggo il fattore comune $\frac{1}{2^3}$ e lo porto fuori dalla sommatoria:

$$\frac{1}{8} \cdot \sum_{h=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^h \leq \frac{1}{8} \cdot 2$$

$$b_n \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{12}$$

E si ha la stima dall'alto del numero di Nepero. Quindi e_n ha limite reale.

$$\exists \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che b_n converge a e .

$$a_n \leq b_n$$

$$\forall m, b_m \leq e$$

Per il teorema dei carabinieri, b_n non supera e . Prendendo $n \geq m$, dato che tutti gli elementi della sommatoria sono positivi:

$$e_n \geq 2 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!} \cdot P_{k,n}$$

So che per il teorema del limite del prodotto:

$$\lim_n P_{k,n} = 1$$

Quindi:

$$\frac{1}{k!} \cdot P_{k,n} = \frac{1}{k!}$$

Si vede che b_m converge a e :

$$b_m = 2 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!}$$

$$e_n \geq 2 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!} < e$$

Esempi di successioni simili a e_n

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$$

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Dimostrazione

e_n^n ha la stessa base e il prodotto degli esponenti; per monotonia e disuguaglianza di Bernoulli $e_n^n \geq 2^n$ diverge a ∞ .

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

Dimostrazione

$$\forall i, 2 \leq e_i < 3$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = e_{n^2}$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = [e_{n^2}]^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}$$

Formula di Stirling

Si può provare per induzione una versione semplificata della formula di Stirling in grado di dare una stima da sotto e da sopra di un fattoriale.

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} \cdot ne, \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Costruzione forma esponenziale

(data la complessità non viene chiesto all'esame)

Si prendono due successioni di prima, con l'aggiunta di una variabile:

$$x \in \mathbb{R}, \quad e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad b_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{k!}\right)^k$$

$$e_n(1) = e_n, \quad b_n(1) = b_n$$

Generalizzando, si vuole trovare una funzione $l(x)$ che risulti il valore a cui tendono le successioni:

$$\forall x, e_n(x) \rightarrow l(x), \quad b_n(x) \rightarrow l(x), \quad l(x) > 0 \quad \forall x$$

$$l(0) = 1, \quad l(1) = e$$

Viene dato per vero che:

1. Per avere una stima da sotto e da sopra, $x_1 < x_2$, $l(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \leq l(x_2) - l(x_1) \leq l(x_2) \cdot (x_2 - x_1)$
2. $\forall x_1, x_2, l(x_1 + x_2) = l(x_1) \cdot l(x_2)$

Definiamo la funzione esponenziale:

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exp(x) = l(x) = e^x$$

Si riscrive (1):

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^x > 0 \quad \forall x$$
$$x_1 < x_2, e^{x_1}(x_2 - x_1) \leq e^{x_2} - e^{x_1} \leq e^{x_2}(x_2 - x_1)$$

Si riscrive (2), che risulta essere la proprietà fondamentale delle potenze:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

Ricavando anche che:

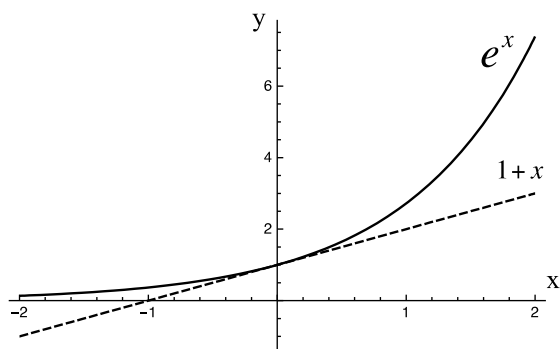
$$l\left(\frac{m}{n}\right) = \left(l(1)\right)^{\frac{m}{n}}$$

Quindi per $x \in \mathbb{Q}$ (rapporto tra interi) si ha che $l(x) = e^x$.

La funzione esponenziale è positiva, continua, strettamente crescente.

Limite fondamentale dell'esponenziale

Riprendendo la formula $x_1 < x_2, e^{x_1}(x_2 - x_1) \leq e^{x_2} - e^{x_1} \leq e^{x_2}(x_2 - x_1)$, se si considerano $x_1 = x_2 = 0$, allora:



$$\forall x, x \leq e^x - 1 \leq x e^x$$

$$\forall x, e^x \geq 1 + x$$

Inoltre, se $x_n \rightarrow +\infty$ allora per il teorema di confronto anche $e^{x_n} \rightarrow +\infty$ mentre per $x_n \rightarrow -\infty$ si ha che $x_n \rightarrow 0^+$, come rappresentato nel grafico della funzione esponenziale.

$$\forall x \neq 0, \min(1, e^x) \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \max(1, e^x)$$

Quindi si ricava che per una successione $x_n \rightarrow 0$:

$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1$$

Esempio

$$n^2 \cdot \left(e^{\sin^2 \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right)$$

È presente una forma indeterminata, bisogna risolverlo con i limiti notevoli. Si notano due possibili forme all'interno della parentesi quadra, la esponenziale e quella del coseno.

Quella esponenziale deve essere:

$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$$

Mentre quella del coseno sente la mancanza del +1, quindi lo si aggiunge ed elimina:

$$-1 + 1 - \cos \frac{1}{n}$$

Ottenendo quindi, applicando la proprietà distributiva:

$$= n^2 \left(e^{\sin^2 \frac{1}{n}} - 1 \right) + n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$$

All'interno della forma esponenziale, x_n è rappresentato da $\sin^2 \frac{1}{n}$, quindi si moltiplica e divide per questo termine:

$$= \frac{e^{\sin^2 \frac{1}{n}} - 1}{\sin^2 \frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Logaritmo naturale

Si tratta della funzione inversa dell'esponenziale.

$$\log:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

La funzione esponenziale è crescente, continua, biunivoca, quindi è possibile trovare la funzione inversa.

$$\forall x > 0, y \in \mathbb{R}, \quad y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$$

$$e^y \geq 1 + y, \quad x \geq 1 + \log x$$

$$\forall y, \log x \leq x - 1 \quad \forall x$$

$$x_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \log x_n \rightarrow +\infty$$

$$x_n \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \log x_n \rightarrow -\infty$$

$$x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0, \quad \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} \rightarrow 1$$

Dimostrazione

Si esegue un cambio di variabile

$$y_n = \log(1 + x_n) \quad \text{def } > 0$$

$$e^{y_n} = e^{\log(1+x_n)} = 1 + x_n$$

$$x_n = e^{y_n} - 1$$

$$\frac{y_n}{e^{y_n} - 1} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Proprietà

$$\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 \cdot x_2$$

Dimostrazione

Per la proprietà dell'esponenziale $x_1 \cdot x_2 = e^{\log(x_1 \cdot x_2)}$:

$$\forall x_1 x_2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$$

$$e^{\log x_1 \cdot x_2} = e^{\log x_1} \cdot e^{\log x_2}$$

Per la proprietà delle potenze $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$:

$$e^{\log x_1 \cdot x_2} = e^{\log x_1 + \log x_2}$$

Quindi:

$$\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 \cdot x_2$$

Inoltre vale la proprietà:

$$\log(x^q) = q \cdot \log x$$

Limite fondamentale del logaritmo

$$x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0$$

$$\frac{\log(1 + x_n)}{x_n} \rightarrow 1$$

Cambiamento di base

$$\log b = \log[e^{\log_a b}]$$

Di logaritmo ne esiste solo uno, quello naturale, tutti gli altri possono essere ottenuti tramite il cambiamento di base:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Anche l'esponente conosce una sola base, le altre si ricavano:

$$a^x = e^{x \cdot \log a}$$