

Limiti Infinitesimi ('o piccoli')

Si prenda in considerazione un limite per $x \rightarrow 0$, per risolverlo in modo convenzionale bisogna considerare le x con esponente minore, dato che è **l'infinitesimo più lento, quindi quello che più conta nei calcoli.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x^3}{3x^4 - 5x^5}$$

Si raccoglie x^2 al numeratore e x^4 al denominatore, dato che sono gli infinitesimi di grado inferiore. Essendo il denominatore di grado superiore rispetto al numeratore, la successione tende a 0.

Altro esempio, si vuole calcolare il limite al variare di β :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^\beta} = l_\beta$$

Se $\beta < 0$ nessun problema, ma si ottiene una forma indeterminata se $\beta > 0$.

Sappiamo che per i limiti notevoli $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, si raccoglie x al numeratore, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^\beta} = x^{1-\beta} \cdot \frac{1 - \sin x}{x}$$

Quando $x^{1-\beta}$ non diverge non c'è la FI, quindi quando $\beta \leq 1$, ma il problema si ripresenta per $\beta > 1$.

Supponiamo di sapere (quindi diamo per buono) che:

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + g(x) \text{ t. che } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^3} = 0$$

$$\frac{x - \sin x}{x^\beta} = \frac{\frac{1}{6}x^3 + g(x)}{x^\beta} = x^{3-\beta} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{g(x)}{x^3} \right)$$

La parentesi tende a $\frac{1}{6}$ per ipotesi $g(x)$. Si può quindi risolvere in ogni caso:

$$\begin{cases} 0, & \beta < 3 \\ \frac{1}{6}, & \beta = 3 \\ +\infty, & \beta > 3 \end{cases}$$

Definizione

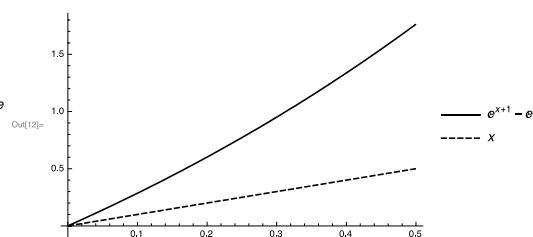
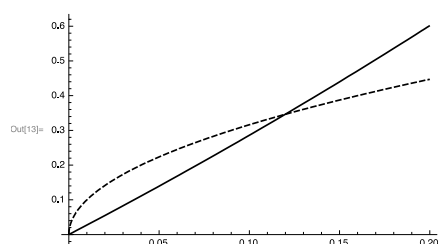
Data una funzione f , si dice “o piccolo” di x^α con $\alpha >$

$$0 \text{ se } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = 0$$

Parte principale
↓
Ordine

$$g(x) = Lx^n + o(x^n)$$

Per esempio x^2 è un “o piccolo” di x per $x \rightarrow 0$, dato che va a 0 più velocemente. Un “o piccolo” in pratica racchiude tutti i termini di ordine superiore a quello segnato $o(x^n)$



Nell'esempio, la funzione $e^{x+1} - e$ è un “o piccolo” di $\sqrt{x}$, dato che per $x \rightarrow 0$ la funzione sta sotto $\sqrt{x}$, ma non è “o piccolo” di x , dato che sta sempre sopra.

Osservazione

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}^+$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

Ordine e parte principale

Data una funzione g , si dice che è un infinitesimo di ordine n con parte principale Lx^n nella forma:

$$g(x) = Lx^n + o(x^n)$$

Allora $\frac{g(x)}{x^n} = \frac{Lx^n + o(x^n)}{x^n} = L + \frac{o(x^n)}{x^n}$, quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = L$

Per il teorema del limite della somma, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} - L = 0$, quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - Lx^n}{x^n} = 0$

Una funzione è di ordine superiore ad un'altra se va a 0 più rapidamente, per esempio x^5 è di ordine superiore a x^3

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x^3}{4x^4 - 5x^2}$$

Si determina che $3x^3$ è un o piccolo di x^2 , stessa cosa per $4x^4$. Usando le notazioni degli o piccoli si può scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{-5x^2 + o(x^2)}$$

Raccogliendo, si può elidere x^2 , quindi il limite risulta calcolabile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \frac{o(x^2)}{x^2} \right)}{x^2 \left(-5 + \frac{o(x^2)}{x^2} \right)} = -\frac{2}{5}$$

Proprietà

$\forall \alpha, \beta > 0, k \in \mathbb{R}$

Gli o piccoli sono in grado di “assorbire” i termini di ordine superiore, dato che sono infinitesimi più veloci dell’ordine dello stesso o piccolo.

Si riducono a $o(x^\alpha)$ le seguenti forme (assorbimento):

1. $k \cdot o(x^\alpha)$
2. $o(x^\alpha) + o(x^\alpha)$
3. $x^{\alpha+\beta}$
4. $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta})$
5. $o(o(x^\alpha))$
6. $o(x^\alpha + o(x^\alpha))$
7. $o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta})$
8. $\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta}$

Possibile eseguire la somma degli ordini:

1. $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
2. $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$

Calcolo dei limiti

Risulta utile per calcolare limiti di forme indeterminate che non possono essere calcolati facilmente con i teoremi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{D(x)}$$

Per prima cosa si guarda il denominatore:

$$o D(x) = Lx^n + o(x^n), \quad L \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$$

Bisogna trovare il grado del denominatore, per poi eseguire lo sviluppo di Taylor all’ordine n del numeratore. Se il denominatore è esplicito (per esempio con x^4 si esegue uno sviluppo al quarto ordine) si prende direttamente il grado della funzione, altrimenti si sviluppa lo stesso con Taylor prendendo il primo termine non nullo per individuare il grado.

Una volta individuato l’ordine si procede a sviluppare il numeratore, partendo dalle funzioni più interne fino a quelle che le contengono. A questo punto si tratta solo di essere precisi nei calcoli algebrici e fare in modo che i termini di ordine superiore a quello fissato vengano assorbiti dagli o piccoli.

Il limite quindi si risolve in ogni caso. Diffida dagli esercizi che fanno fare troppi calcoli.

Sviluppo di Taylor

Data una funzione f , il polinomio di Taylor di ordine n della funzione è $P_n(x)$ di ordine n tale che $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, dove $n \in \mathbb{N}$. Quindi equivale a scrivere al posto della funzione un polinomio più un errore rappresentato dall'infinitesimo.

To approximate a function f near $x = a$ by a polynomial $p(x)$ of degree d , find a choice of $p(x)$ such that

$$\begin{aligned}p(0) &= f(0) \\p'(0) &= f'(0) \\p''(0) &= f''(0)\end{aligned}$$

and so on unto

$$p^{(d)}(0) = f^{(d)}(0)$$

Quindi le due funzioni hanno le derivate progressivamente uguali, e la serie di Taylor di una funzione f per $x \rightarrow a$ si indica come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Se esiste lo sviluppo di Taylor, allora è unico.

Sviluppi di funzioni comuni

Nello sviluppo di una funzione con la serie di Taylor (è una serie, non te ne sei accorto?) si può sostituire x con qualunque altra funzione.

Inoltre i limiti notevoli (per esempio $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$) sono collegati agli "o piccoli" e agli sviluppi di Taylor, basta vederli come sviluppi al primo ordine.

Osservazione

Per gli sviluppi di funzioni pari, esistono solo termini di grado pari, il contrario per funzioni dispari (es. seno e coseno)

Una funzione può essere sviluppata fino a un ordine arbitrario, il che vuol dire che si sceglie quale ordine iniziare ad assorbire tramite o piccolo, e quali rendere espliciti. Quindi non ha senso avere uno sviluppo di terzo grado che contiene un termine di grado superiore, dato che fa parte dell' "o piccolo".

Esempio

Funzione seno:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \text{Ordine 3}$$

$$\sin x = x + o(x^2) - \text{Ordine 2}$$

$$\sin x = x + o(x^1) - \text{Ordine 1}$$

$$\sin x = o(1) - \text{Ordine 0}$$

Seno, coseno, tangente

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sin x & & \begin{array}{c} | \\ + \circ \end{array} & & \begin{array}{c} | \\ - \circ \end{array} & & \begin{array}{c} | \\ + \circ \end{array} \\ \hline \cos x & + \circ & & - \circ & & + \circ & \end{array}$$

Esponenziali, logaritmi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + o(x^n)$$

Binomi

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Frazioni

Esempio

Si vuole calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (1 - \cos x)}{e^{x^2-x} - \cos x + \log\left(1 + x - \frac{3}{2x^2}\right)}$$

Per prima cosa si deve trovare l'**ordine**, e la **parte principale** del denominatore:

$$D(x) = o(x^2) \Rightarrow \text{Si sviluppa al terzo ordine}$$

La funzione esponenziale si risolve per sostituzione:

$$\begin{aligned} e^{x^2-x} &\Rightarrow t = x^2 - x \\ &= 1 + (x^2 - x) + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x)^2 + \frac{1}{6} \cdot (x^2 - x)^3 + o((x^2 - x)^3) \\ o((x^2 - x)^3) &= o(x^3) \end{aligned}$$

Durante i calcoli si eliminano i termini di ordine superiore al terzo:

$$= \dots = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Si passa alla funzione logaritmica, sempre per sostituzione:

$$\log\left(1 + x - \frac{3}{2x^2}\right) = \log(1+t) \Rightarrow t = x - \frac{3}{2}x^2$$

Eseguendo lo sviluppo del logaritmo:

$$= x - 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

Funzione coseno:

$$-\cos x = -1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

A questo punto si mette tutto assieme:

$$D(x) = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$N(x) = 2x(1 - \cos x) = 2x \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = x^3 + o(x^3)$$

Quindi il limite risulta:

$$\frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Limiti con parametro

Un esempio di esercizio può essere: “Dato un limite, dire per quali valori di α converge”. Il limite è infinitesimo ($x \rightarrow 0$).

Normalmente si svolge “espandendo” le funzioni con le successioni di Taylor, per poi studiare la funzione secondo i gradi dei termini.

Fondamentale ricordare come funzionano le funzioni di diverso grado:

