

Limiti di Successioni

Una successione è una funzione definita su un insieme infinito di numeri naturali (detti termini) e con codominio in $\mathbb{R}$ per le successioni reali.

Si consideri un insieme di numeri naturali positivi infinito:

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$$

Una funzione $a : S \rightarrow \mathbb{R}$ è una successione di numeri reali:

$$a_n = f(n) \rightarrow \{a_n\}_n$$

L'insieme S è il dominio della successione, n può assumere solo valori interi positivi a partire da un numero n_0 .

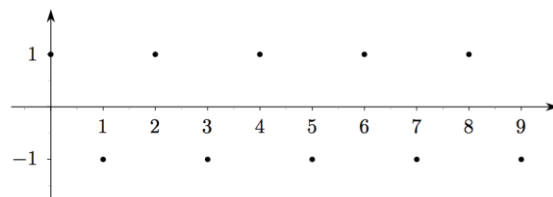
Esempio

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

Si nota che per $n = 0$ la funzione risulta 0, mentre per n che cresce man mano ci si avvicina a 1, senza mai raggiungerlo.

Esempio

$$f(x) = \frac{n}{1 + (-1)^n}$$



Non è una successione, dato che per n dispari non è definita in $\mathbb{R}$, mentre per n pari ha un risultato.

Non esiste nessun sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ per cui ogni valore possa dare un risultato reale, quindi non è una successione reale.

Proprietà

Si trasferiscono le proprietà delle funzioni senza molte modifiche.

Massimo e minimo

Se esiste massimo viene definito nel codominio, ed è maggiore di ogni altro a_n , inoltre esiste un n in grado di generarlo.

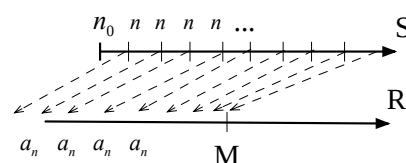
$$M = \max a_n = \forall n \in S, a_n \leq M, \exists \bar{n} \in S : a_{\bar{n}} = M$$

Limite superiore e inferiore

Limitata superiormente (ogni elemento $\leq$ del massimo):

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n, a_n \leq M$$

Limitata inferiormente:



$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n, a_n \geq m$$

Limitata:

$$\exists \tilde{M} \in \mathbb{R} : \forall n, |a_n| \leq \tilde{M}$$

Estremo superiore e inferiore

Il più piccolo dei maggioranti.

$$L = \sup a_n \in \mathbb{R}$$

Nota che se $\sup a_n = +\infty$, allora ogni numero reale è superato da almeno un elemento della successione, quindi $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > M$.

Successioni monotone

Sono funzioni monotone definite su semirette di naturali. Si applicano le stesse leggi delle funzioni monotone, per esempio una successione è strettamente crescente se $\forall n, m \quad n < m \Rightarrow a_n < a_m$.

Grazie al principio del minimo intero (ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo) si verifica che si può dimostrare la monotonia di una funzione comparando due termini successivi.

$$\{a_n\}_n \text{ str. crescente} \Leftrightarrow \forall n, a_n < a_{n+1}$$

Dimostrazione

$\Rightarrow$ è ovvia, bisogna provare invece che $\Leftarrow$

$$\mathcal{A}: \forall n, m, \quad n < m \Rightarrow a_n < a_m$$

$$\mathcal{B}: \forall n, \quad a_n < a_{n+1}$$

Verifichiamo con la contronominale che

$$\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}$$

Se la successione non è strettamente crescente, allora $\exists \bar{n}, \bar{m} : \bar{m} > \bar{n} \wedge a_{\bar{m}} \leq a_{\bar{n}}$.

Si introduce l'insieme di indici naturali:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \wedge a_n \leq a_{\bar{n}}\}$$

$$A \neq \emptyset \text{ perchè } \bar{m} \in A$$

Per il principio del minimo intero esiste un minimo:

$$\exists k = \min A, \quad k > \bar{n} + 1$$

Non può essere il successivo di $\bar{n}$ perchè per ipotesi $a_{\bar{n}} < a_{\bar{n}+1}$.

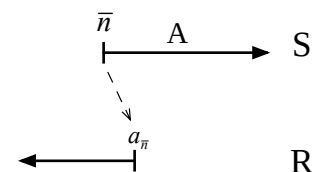
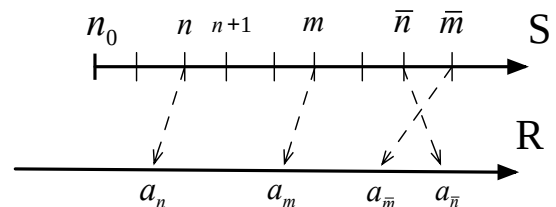
$h = k - 1 > \bar{n}$, si applica $\mathcal{A}$:

$$a_h < a_{h+1} = a_k \leq a_{\bar{n}}$$

k è unico, quindi deve stare nell'insieme.

Leggendo le disuguaglianze triangolari, abbiamo che $a_h \leq a_{\bar{n}} \rightarrow h \in A$

Ma questo è assurdo, quindi è verificato che $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.



Esempio

Vedere che monotonia hanno le funzioni.

$$f(n) = n!$$

$$\forall n, n! \leq (n+1)!$$

Debolmente crescente (ricorda che $0! = 1$)

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Strettamente decrescente

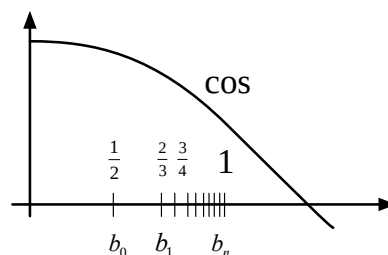
$$f(n) = \sqrt{n^2 - 10}$$

Si può vedere come la composizione di una funzione e una successione. Se dimostro che $n^2 - 10$ è strettamente crescente e $\sqrt{x}$ è strettamente crescente, allora vale lo stesso per la composizione (proprietà delle funzioni monotone).
 $\forall n, n^2 - 10 < (n+1)^2 - 10 \Rightarrow 0 < 2n + 1$

$$f(n) = \cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Bisogna verificare che è strettamente decrescente. Si nota che la funzione coseno è periodica, quindi non è monotona, ma non ci interessa, dato che il codominio è ristretto in un determinato intervallo.

Si tratta della composizione di una successione e una funzione, la funzione coseno non è monotona, ma considerandola ristretta ad un insieme e può diventarla. Si disegnano quindi i punti della successione $\frac{n}{n+1}$ su x , intuitivamente mi aspetto che b_n sia strettamente crescente



I punti non sono minori di 0 o maggiori di 1, quindi si restringe, nell'intervallo considerato i valori in y decrescono.

Sapendo che $\cos_{|[0,1]} x$ è strettamente decrescente, si nota che b_n è strettamente crescente, la composizione è quindi decrescente

Dobbiamo far vedere che $\forall n, b_n < b_{n+1}$:

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

Identità verificata, quindi validi. La composizione è strettamente decrescente.

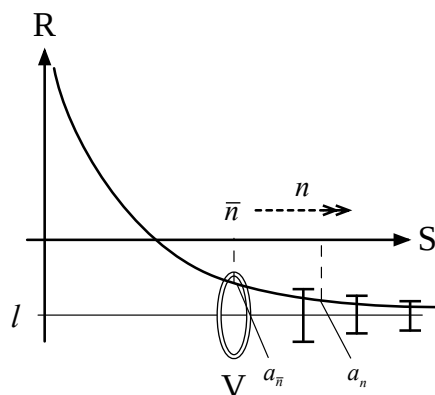
Limite di una successione

Data una successione a_n di numeri reali, il limite è un numero reale a cui la successione “tende senza mai arrivarci”, quindi se la distanza tra a_n e l ($|a_n - l|$) è sempre più piccola con n che diventa sempre più grande.

Dati $l \in \mathbb{R}, \{a_n\}_n, a_n \rightarrow l$ (a_n tende a l) se:

$$\forall V \in \mathcal{I}_l, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in V$$

In parole umane, per qualunque intorno appartenente agli intorni di l , esiste un $\bar{n}$ tale che per qualunque n successivo ad esso, a_n corrispondente appartiene a quell'intervallo.



Una successione può essere **limitata superiormente** (esiste un valore M maggiore di tutti gli altri valori), **limitata inferiormente** (esiste m minore di tutti) o **limitata** (esiste M oppure m quindi $|a_n| \leq M$). **Da non confondere assolutamente con il limite di una successione.**

Il limite di una successione a_n per n che tende a un valore k (o infinito) si può scrivere nella forma operativa:

$$\lim_{n \rightarrow k} a_n$$

Se un limite viene scritto senza specificare il valore di k , allora si considera $k = \infty$, dato che una successione ha dominio $\mathbb{N}$.

$$\lim_n a_k$$

Osservazione

Possono esistere successioni che **non hanno limite** (non tendono ad un valore preciso) **pur essendo limitate**, per esempio $a_n = (-1)^n$ continua ad “oscillare” tra 0 e 1 all’aumentare di n senza mai avvicinarsi ad un valore preciso.

Dimostrazione

Se il limite esiste, allora è unico.

Supponiamo che la successione tenda a due limiti $l_1 = l_2$:

$$a_n \rightarrow l_1 \text{ quindi } \forall V_1 \in \mathcal{I}_{l_1}, \exists \bar{n}_1 : \forall n > \bar{n}_1, a_n \in V_1$$

$$a_n \rightarrow l_2 \text{ quindi } \forall V_2 \in \mathcal{I}_{l_2}, \exists \bar{n}_2 : \forall n \geq \bar{n}_2, a_n \in V_2$$

$$\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\} \forall n \geq \bar{n}, a_n \in (V_1 \cap V_2) \text{ (deve appartenere ad entrambi)}$$

Dato che punti distinti possono possedere intorni disgiunti, allora li scelgo:

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \rightarrow a_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Ed è assurdo, quindi il limite è unico

Casi

$$]M, +\infty[\in \mathcal{I}_{+\infty}$$

$$]-\infty, N[\in \mathcal{I}_{-\infty}$$

$$l \in \mathbb{R},]H, K[\in \mathcal{I}_l:$$

Positivamente divergente:

$$a_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}, a_n > M$$

Negativamente divergente:

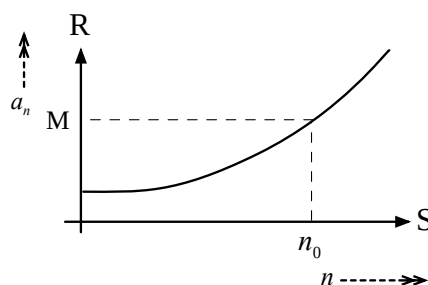
$$a_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R}^+, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, a_n < -N$$

Convergente:

$$a_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall H, K : H < l < K, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in]H, K[$$

Infinitesima:

$$a_n \rightarrow 0.$$



Da notare che se la successione non ha limite è detta **indeterminata**.

Esempio

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

All'aumentare di n la successione tende a 0, dato che una frazione con il denominatore sempre più grande risulta un numero sempre più piccolo.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

Quindi, per qualunque numero (molto piccolo) ε esiste un termine $\bar{n}$ tale che per ogni n maggiore di esso la successione risulta comunque minore di ε , in pratica verifica che il risultato diventa sempre più piccolo.

$$\bar{n} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

Esempio

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Equivale a scrivere che:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

È verificato per qualunque ε per la proprietà di Archimede (insieme $\mathbb{N}$ non limitato superiormente).

$$\bar{n} = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$$

Proprietà di limitatezza

Se una successione $\{a_n\}_n$ è definitivamente limitata, allora $\{a_n\}_n$ è limitata.

$$\text{HP: } \exists H, K \in \mathbb{R}, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, H < a_n < K$$

$$\text{TH: } \exists \tilde{n} : \forall n, |a_n| \leq \tilde{n}$$

Di fatto questo dice che se una successione tende (dopo un certo valore) ad un valore non infinito, allora non può tendere contemporaneamente a $+\infty$ e $-\infty$. Quindi o ha limite inferiore o superiore, in entrambi i casi è limitata.

Nota: per definitivamente vero si intende che per un predicato $\mathcal{P}(n)$ su $\mathbb{N}$, se $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \mathcal{P}(n)$ vera allora il predicato è definitivamente vero. Quindi definitivamente vuol dire “da un certo punto in poi, sempre”

Se $\{a_n\}_n$ converge, allora la serie è limitata, quindi l'insieme immagine è limitato. Il viceversa non è detto che sia sempre vero.

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}, H < l < K \Rightarrow H < a_n < K$$

Permanenza del segno

Se $\{a_n\}_n$ ha limite $l \neq 0$, allora la successione ha definitivamente segno costante, quindi se per esempio ha limite positivo o infinito, allora è definitivamente (quindi eventualmente dopo un certo valore) positiva la successione.

Esempio

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Si nota che $a_n \rightarrow 0$ dato che il denominatore cresce, quindi $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ se $n > \frac{1}{\varepsilon}$, quindi è infinitesima, ma non è nè definitivamente di segno positivo nè negativo, dato che continua ad oscillare sopra e sotto lo zero per ogni valore di n .

Risoluzione di limiti

Teorema di confronto

Si tratta di trovare la parte di piano in cui è definita una successione per capire se tende a $+\infty$ o $-\infty$. Confrontando una successione con un'altra si può sapere in quale caso risiede.

Quindi, date due successioni $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ tali che definitivamente $a_n < b_n$, si distinguono due casi:

1. $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$
2. $a_n \rightarrow -\infty \Rightarrow b_n \rightarrow -\infty$

$\forall M, \text{def } b_n \geq M, \text{def } a_n > M$

Teorema dei Carabinieri

È simile al teorema di confronto, in cui si capisce l'andamento di una successione osservando dove non può andare oltre, in questo caso si pongono due "carabinieri" che "scortano" la successione, quindi uno a destra e l'altro a sinistra, e si nota il loro andamento, dato che la successione è sicuramente in mezzo alle altre due. Dall'andamento delle successioni "carabinieri" si deduce l'andamento della successione in considerazione.

Quindi, date le successioni $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{c_n\}_n$ (a e c sono i carabinieri) tali che:

1. $\text{def } b_n \leq a_n \leq c_n$
2. $b_n \rightarrow l$
3. $c_n \rightarrow l$

Allora anche la successione a_n ha limite, e $a_n \rightarrow l$.

Nota che se il limite è $\pm\infty$ allora il teorema è contenuto nel teorema di confronto.

Dimostrazione

TH: $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

HP:

1. $\exists \bar{n}_1 : \forall n \geq \bar{n}_1, b_n \leq a_n \leq c_n$
2. $\exists \bar{n}_2 : \forall n \geq \bar{n}_2, l - \varepsilon < b_n \leq l + \varepsilon$
3. $\exists \bar{n}_3 : \forall n \geq \bar{n}_3, l - \varepsilon < c_n \leq l + \varepsilon$

Le ipotesi fanno valere la tesi

Esempio

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n}{n} = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Si cercano i valori massimi e minimi che può assumere, in questo caso per n pari vale $2 + \frac{1}{n}$, mentre per n dispari vale $2 - \frac{1}{n}$. Applicando il teorema dei carabinieri notiamo che la successione è sempre delimitata tra questi due casi:

$$2 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

A destra e a sinistra tendono a 2, quindi anche quella centrale tende a 2, si tratta di una successione infinitesima.

Corollare

$\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, l \in \mathbb{R}$ tali che:

1. $\text{def}|a_n - l| \leq b_n$
2. $b_n \rightarrow 0$

Allora $\{a_n\}_n$ ha limite, e $a_n \rightarrow l$.

Applicandolo al teorema dei carabinieri, è come se da una parte ci fosse un "muro" (lo 0):

$$0 \leq |b_n - l| \leq b_n$$

$$|a_n - l| \rightarrow 0 \Rightarrow (a_n - l) \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow l$$

Dimostrazione

Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $|a_n| \rightarrow |l|$
(converge al valore assoluto di l), il
viceversa è falso.

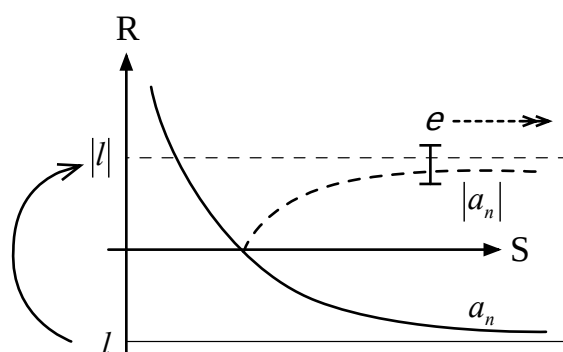
Si fa uso della seconda disuguaglianza triangolare.

$$\text{TH: } \forall \varepsilon > 0, \text{def} ||a_n| - |l|| < \varepsilon$$

$$||a_n| - |l|| \leq |a_n - l|$$

Ma per ipotesi $a_n \rightarrow l$, quindi $|a_n - l| < \varepsilon$

Quindi vale la tesi.



Limite della somma

$$\lim_{n \rightarrow x_0} a_n + b_n = l_a + l_b$$

$$(a_n + b_n) \rightarrow (l_a + l_b)$$

Dati $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n: a_n \rightarrow l_a \wedge b_n \rightarrow l_b$, se ha senso la somma $l_a + l_b$ (per esempio $+\infty - \infty$ non ha senso), allora la successione $\{a_n + b_n\}_n$ ha limite e $(a_n + b_n) \rightarrow l_a + l_b$.

Dimostrazione

$$l_a, l_b \in \mathbb{R} \vee$$

$$\text{TH: } \forall \varepsilon > 0, \text{def} |(a_n + b_n) - (l_a + l_b)| < \varepsilon$$

Si sa che man mano che si procede la distanza tra la successione e il limite diminuisce, viene rappresentata da $\forall \varepsilon$ sempre più piccolo:

$$\text{def}|a_n - l_a| < \varepsilon \wedge \text{def}|b_n - l_b| < \varepsilon$$

Quindi aggiungendo membro a membro, la somma è minore di 2ε :

$$|a_n - l_a| + |b_n - l_b| < 2\varepsilon$$

Allora per la prima disuguaglianza triangolare:

$$|(a_n + b_n) - (l_a + l_b)| = |(a_n - l_a) + (b_n - l_b)| \leq |a_n - l_a| + |b_n - l_b| < 2\varepsilon$$

Per la catena di disuguaglianze:

$$|(a_n - l_a) + (b_n - l_b)| < 2\varepsilon$$

Dimostrazione

Gli altri casi si fanno analogamente:

$$l_a = +\infty, l_b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$l_a = -\infty, l_b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\text{TH: } \forall M, \text{def } a_n + b_n > M$$

$$\text{HP: def } a_n > M$$

Si aggiunge una costante:

$$\forall M, \text{def } a_n + b_n > M + \lambda$$

Mi serve sapere se quando $\exists \lambda \in \mathbb{R} : b_n > \lambda$ allora $\forall n, \{b_n\}_n$ è limitato inferiormente.

$$b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \{b_n\}_n \text{ lim. inf}$$

$$b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow \{b_n\}_n \text{ lim. sup}$$

Limite del prodotto

$$a_n b_n \rightarrow l_a l_b$$

Dimostrazione

Si deve dimostrare che se la distanza tra due successioni e il loro limite tende a 0, allora anche la distanza dei prodotti deve tendere a 0.

$$\text{TH: } \forall \varepsilon > 0, \text{def } |(a_n \cdot b_n) - (l_a \cdot l_b)| < \varepsilon$$

Si aggiunge e si toglie una quantità che sappiamo essere piccola:

$$|(a_n \cdot b_n) - (l_a \cdot l_b)| = |a_n \cdot b_n - \mathbf{b_n} \cdot \mathbf{l_a} + \mathbf{b_n} \cdot \mathbf{l_a} - l_a \cdot l_b|$$

Metto assieme i due membri, applico la prima disuguaglianza triangolare:

$$|(a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b) + (l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b)| \leq |(a_n - l_a) \cdot b_n| + |l_a \cdot (b_n - l_b)|$$

Il prodotto di due numeri positivi è sempre positivo, si spezza il valore assoluto:

$$|(a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b) + (l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b)| \leq |b_n| \cdot |a_n - l_a| + |l_a| \cdot |b_n - l_b|$$

Dato che la seconda successione deve tendere a l_b :

$$\text{def } |b_n - l_b| < \varepsilon$$

Sappiamo che $|a_n - l_a| < \varepsilon$, ma al primo membro non trovo una costante, ma $|b_n|$. Per risolverlo si usa il teorema di limitatezza:

$b_n \rightarrow l_b \in \mathbb{R}$
 $\{b_n\}_n$ limitata
 $\exists M > 0 : \forall n, |b_n| \leq M$ (M è una costante fissata)

A questo punto siamo a posto, il primo fattore si controlla con n , quindi $|b_n| \leq M$, quindi:

$$|(a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b) + (l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b)| \leq M \cdot \varepsilon + |l_a| \cdot \varepsilon \text{ definitivamente} \\ \leq (M + |l_a|) \cdot \varepsilon$$

Dove dentro alla parentesi si ha una quantità che non dipende da ε .

Limite del reciproco

$\{b_n\}_n : b_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$

1. $l = +\infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow 0^+$
2. $l = -\infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow 0^-$
3. $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{l}$
4. $l = 0^+ \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow +\infty$
5. $l = 0^- \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow -\infty$

Dimostrazione 3

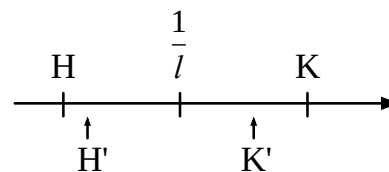
$l > 0$

TH: $\forall H, K, H < \frac{1}{l} < K$, def $H < \frac{1}{b_n} < K$

Nota, H, K definiscono un intorno di $\frac{1}{l}$.

$H' > 0, K' \in \mathbb{R}$

$H < H' < \frac{1}{l} < K' < K$



Si può passare ai reciproci, dato che sono tutti positivi.

$$\frac{1}{K'} < l < \frac{1}{H'}$$

$$\text{def } \frac{1}{K'} < b_n < \frac{1}{H'}$$

$$\Rightarrow \text{def } H' < \frac{1}{b_n} < K'$$

Dimostrazione 4

$l = 0^+$

TH: $\forall M > 0$, def $\frac{1}{b_n} > M$

Limite del quoziente

$$a_n \rightarrow l_a, \quad b_n \rightarrow l_b \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_a}{l_b}$$

Si può vedere il quoziente come il prodotto per il reciproco.

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

Osservazione

Se si sa trattare il limite del reciproco, per ottenere il quoziente:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

Riassunto

1. $a_n \rightarrow +\infty \wedge \{b_n\}_n \text{ lim. inf.} \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow +\infty$
2. $a_n \rightarrow -\infty \wedge \{b_n\}_n \text{ lim. sup.} \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow -\infty$
3. $a_n \rightarrow +\infty \wedge \exists H > 0 : \text{def } b_n \geq H \Rightarrow (a_n \cdot b_n) \rightarrow +\infty$
 - a. $\text{def } a_n \cdot b_n \geq H \cdot a_n$
4. $a_n \rightarrow +\infty \wedge \exists k < 0 : \text{def } b_n \leq k \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$
5. $a_n \rightarrow -\infty \wedge \exists H > 0 : \text{def } b_n \geq H \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$
6. $a_n \rightarrow -\infty \wedge \exists k < 0 : \text{def } b_n \leq k \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$
7. $a_n \rightarrow 0 \wedge \{b_n\}_n \text{ lim.} \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow 0$

Limiti particolari

k è un numero qualsiasi, che però prima o poi diventa più piccolo di n :

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 1$$

Ma se si mette n all'esponente, non verrà mai superato da sè stesso, e la combinazione della frazione sempre più piccola, sommata a 1 ed elevata a n produce il numero di nepero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Forme indeterminate

Nel caso in cui in un limite almeno una parte diverge bisogna studiare attentamente la situazione per avere un risultato valido.

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Limiti da sopra e da sotto

Si può notare che alcuni limiti tendono a 0 da sopra o da sotto, si scrive con la seguente notazione:

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0^+, \quad -\frac{1}{n} \rightarrow 0^-, \quad \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$

Prestare particolare attenzione alla ultima successione: non ha limite, ma tende a 0 sia da sopra che da sotto, dato che continua ad oscillare sempre meno, ma non si ferma mai.

Limite di successioni monotòne

Ogni successione monotòna ha limite. Questo teorema crea un legame tra l'estremo superiore e il limite di una successione (importante da imparare la dimostrazione)

$$a_n \begin{cases} \text{cresc.} \Rightarrow l = \sup_n a_n \\ \text{decresc.} \Rightarrow l = \inf_n a_n \end{cases}$$

Esempio

$$a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

Dimostrazione

Se $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente:

$$\exists l = \sup_n a_n \in \mathbb{R}$$

l è estremo superiore della successione, quindi è maggiorante per l'insieme dei punti della successione (ricorda, ε rappresenta un numero sempre più piccolo):

$$\forall n, a_n \leq l, \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : a_n > l - \varepsilon$$

$$\forall n \geq \bar{n}, a_n \geq a_{\bar{n}}$$

Allora per proprietà transitiva:

$$\forall n \geq \bar{n}, l - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq l \leq l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

Se $\{a_n\}_n$ non è limitata superiormente:

$$\sup_n a_n = +\infty$$

Quindi qualsiasi numero reale non è maggiorante:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > M$$

$$\forall n > \bar{n}, a_n \geq a_{\bar{n}} > M$$

$$a_n \in]M, +\infty[$$

Corollare

Ogni successione definitivamente monotòna ha limite.

Esempio

$$a_n = \begin{cases} 100, & n \leq 1000 \\ \frac{n}{n+1}, & n > 1000 \end{cases}$$

La successione è definitivamente crescente, dato che tende a 1 dal basso, definitivamente perchè solo dopo $n = 1000$.

Principio di sostituzione sul prodotto

Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$:

$$\lim_n \frac{a_n + b_n}{c_n} = \frac{b_n}{c_n} \left(1 + \frac{a_n}{b_n} \right)$$

Supponiamo che possiamo calcolare che $\frac{b_n}{c_n} \rightarrow l$, allora dato che il secondo termine tende a 1, tutto il limite tende a l .

Successioni definite per ricorrenza

Sono successioni che per calcolare un valore richiedono che sia calcolato il valore precedente, di fatto richiamando se stesse per induzione fino a che non si raggiunge l'inizio della successione.

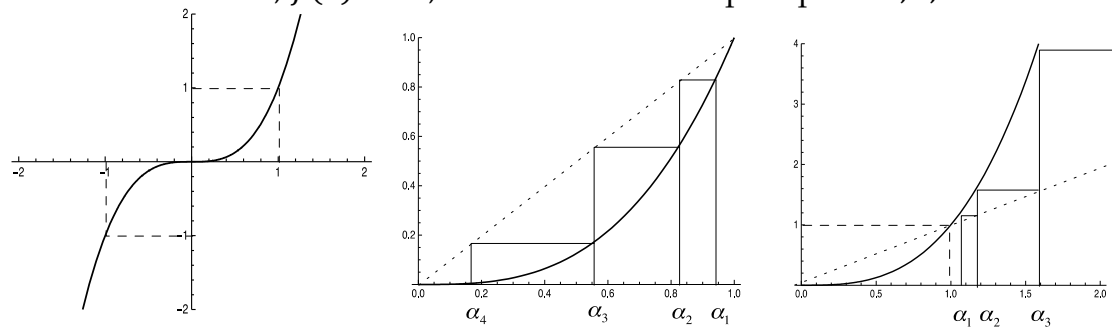
La successione di Fibonacci o il fattoriale sono ricorrenti, per esempio nel fattoriale si ha che per $a_n = n \cdot (a_{n-1})$ dove per $n = 0, a_n = 1$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont. } \alpha \in \mathbb{R}, a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \forall n$$

Questo ci dice che esiste un valore iniziale assunto dalla funzione, e che per tutti gli altri valori bisogna calcolare la ricorrenza da a_n a a_0 .

Esempio

Si ha una funzione, $f(x) = x^3$, che vale che $x^3 = x$ per i punti 0, 1, -1.



Per risolvere la successione bisogna trovarne il valore, dato un punto α del dominio. Per trovarlo però bisogna eseguire tutte le ricorrenze, ottenendo un valore sempre più preciso.

Quando si prende un valore di α compreso tra 0 e 1, si ha che il grafico risulta sotto la bisettrice, è una successione decrescente con limite 0, mentre se $\alpha > 1$ essa diverge dalla bisettrice.

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1} = (a_n)^3 \forall n \end{cases}$$

Quindi nella successione ci sono tre punti in cui è costante, vengono chiamati **punti fissi della successione**.

Una volta trovati i punti fissi si divide la retta reale (il codominio) in intervalli:

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

$$f(I_i) = I_i \text{ se } i \in \{I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4\}$$

Grazie all'induzione, se $\alpha \in I_i$ allora anche la successione è contenuta nell'intervallo $\{a_n\}_n \in I_i$. Per esempio tra 0 e 1 la successione è decrescente (all'andare avanti della ricorsione diventa sempre più piccola), dato che nel grafico sta sotto la bisettrice:

$$\forall x \in I_3, f(x) < x, \text{ se } \alpha \in I_3$$

$$\forall n, a_{n+1} = f(a_n) < a_n$$

Nell'intervallo I_3 quindi è strettamente crescente, ha limite $l \in]0, 1[$.

$l = 0$ perchè $a_{n+1} = f(a_n) \forall n$ è continua in l , $f(a_n)$ converge a $f(l)$ quindi l è un punto fisso, dato che l'unico punto fisso presente è 0, allora $l = 0$.

Se $\alpha > 1$, quindi si considera l'intervallo I_4 , la successione diverge positivamente:

$$\{a_n\}_n <]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I_4, f(x) > x, \quad \text{str. crescente}$$

$$\forall n, a_{n+1} = f(a_n) > a_n$$

Per quello che riguarda il limite:

$$l \in]1, +\infty[\vee l = +\infty$$

Dimostriamo che $l = +\infty$, perchè se il limite fosse un numero reale, allora dovrebbe essere un punto fisso, quindi non può essere reale, quindi è $+\infty$.

Quindi si determina il limite della successione nei vari casi:

$$l_\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ 0, & -1 < \alpha < 1 \\ -1, & \alpha = -1 \\ -\infty, & \alpha < -1 \end{cases}$$

Esempio

$$f(x) = x^2$$

Funzione positiva, se ha limite deve essere maggiore o uguale a 0.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 \end{cases}$$

Si trovano i punti fissi:

$$x^2 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

A destra di 0 il comportamento è uguale all'esempio precedente, mentre a sinistra si nota che risulta simmetrica (pari), quindi $f(I_1) = I_4$ e $f(I_2) = I_3$.

Se $\alpha \in]-\infty, 1[$:

$$a_1 = f(\alpha) \in]1, +\infty[$$

Se $\alpha \in]1, +\infty[$:

$$a_1 = f(\alpha) \in]0, 1[$$

Quindi:

$$l_\alpha = \begin{cases} +\infty, & |\alpha| > 1 \\ 1, & |\alpha| = 1 \\ 0, & |\alpha| < 1 \end{cases}$$