

Numeri Reali $\mathbb{R}$

Si procede con la costruzione assiomatica dei numeri reali. (un assioma è una regola che si assume vera a priori). Un numero reale soddisfa tutte le proprietà dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e l'assioma di Dedekind.

Un insieme numerabile ha una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali $\mathbb{N}$, e i numeri reali $\mathbb{R}$ sono molto maggiori dei numeri naturali. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi, ma molto meno di $\mathbb{R}$, è quasi impossibile centrare un numero razionale puntando a caso sulla retta reale, essendo un insieme “bucherellato”.

Le proprietà di $\mathbb{Q}$:

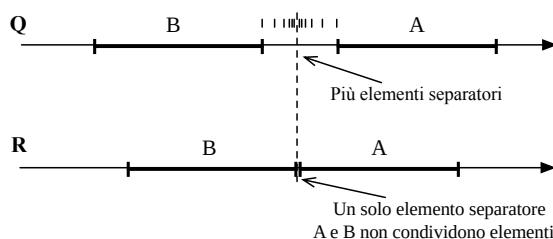
- Somma:
 - Associativa, commutativa ($\mathbb{N}$)
 - Esiste elemento neutro 0 ($\mathbb{N}$)
 - Esiste elemento opposto ($\mathbb{Q}$)
- Prodotto
 - Associativa, commutativa ($\mathbb{N}$)
 - Esiste elemento neutro 1 ($\mathbb{N}$)
 - Esiste reciproco $\frac{1}{x}$
 - Distributiva rispetto alla somma
- Relazione d'ordine
 - Regole di calcolo in disequazioni

Assioma di Dedekind

Si considerino due insiemi A e B **disgiunti**, l'assioma di Dedekind prova l'esistenza di uno e **un solo elemento** c detto separatore che sta dopo ogni elemento di A e prima di B .

Questo assioma non si applica a $\mathbb{Q}$, e anzi, riempie i “buchi” dell'insieme numerico dei razionali, provando la continuità di $\mathbb{R}$.

L'elemento separatore in $\mathbb{Q}$ non è unico, lo è se e solo se A e B sono separati da un numero razionale, altrimenti sono presenti più elementi.



Viene enunciata come segue

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

dove c è l'elemento separatore dei due insiemi.

Esempio

L'elemento $\sqrt{2}$ non fa parte di $\mathbb{Q}$, quindi non può essere massimo o minimo di un insieme. Esisterebbero infiniti valori che si avvicinano sempre di più a

$\sqrt{2}$ ma nessuno che lo raggiunge. Quindi di fatto è quello che prima veniva definito “buco” nell’insieme $\mathbb{Q}$.

Esempio

Si dimostra che l’assioma non funziona sui numeri razionali. Presi:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \vee x^2 \leq 2\}$$

$$B = \mathbb{Q} \setminus A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\} \text{ (complementare)}$$

Si deve provare che non esiste l’elemento separatore, dato che non è razionale $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, si procede a dimostrare per assurdo.

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale.

$$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}^+ : \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

Dove m, n devono essere primi tra di loro.

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow m^2 \text{ pari}$$

Nota che m deve essere pari perchè doppio del quadrato di un numero $\mathbb{N}^+$

Si fissa che $m = 2s, s \in \mathbb{N}$, si ricostruisce $m^2 = 2 \cdot n^2$:

$$(2s)^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2s^2 \Rightarrow n^2 \text{ pari}$$

Ma se m, n sono pari allora non sono primi tra di loro, quindi è assurdo. $\rightsquigarrow$

Estensione di $\mathbb{R}$ con infinito

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$$

Si estendono anche le operazioni di somma e prodotto:

$$\forall x > -\infty, \quad x + (+\infty) = +\infty$$

$$\forall x < +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty$$

Simile per la moltiplicazione.

$\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$ non hanno senso

Assioma di Archimede

$$a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \exists n \in \mathbb{N}^+ : n \cdot a > b$$

L’assioma prova che l’insieme $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, dicendo che esiste sempre un numero che moltiplicato per a , qualunque sia il suo valore, crei un nuovo valore superiore di qualunque numero sia b .

Dimostrazione

Si vuole dimostrare che l’insieme dei **multipli di A** non è limitato superiormente (quindi può essere maggiore di b indicato prima):

$$A = \{n \cdot a : n \in \mathbb{N}^+\}$$

Supponiamo per assurdo che A sia limitato superiormente.

$$\exists L \in \mathbb{R} : L = \sup A$$

Dato che a è l'elemento più piccolo dell'insieme ma non è nullo, allora è confermato che $L - a$ è più piccolo di L , e $n \cdot a$ che è un elemento di A (è un suo multiplo) lo supera:

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ : n \cdot a > L - a$$

Ma dato che A è l'insieme dei multipli, esiste un multiplo che a sua volta supera $L - a$.

$$b \in A : b = (n + 1) \cdot a > L$$

E questo è assurdo, poichè un elemento dell'insieme non può superare il limite superiore.

Corollari

Si prova quindi che l'insieme non ha limite superiore, ed esiste sempre un numero naturale maggiore di un numero reale:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+ : n > x \text{ [sempre più grande]}$$

Per contronominale si ottiene che:

$$x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^+, x < \frac{1}{n} \text{ [sempre più piccolo]}$$

Esempio

Si vogliono trovare gli estremi dicendo se sono massimo o minimo dell'insieme:

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si nota che la funzione si avvicina sempre di più a 1 man mano che cresce n .

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dimostriamo che **0 è il minimo**, basta vedere che 0 sta nell'insieme e ogni elemento è maggiore di 0:

$$0 \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \geq 0$$

Per vedere dove termina l'insieme, si nota che 1 è maggiorante, quindi tutti gli elementi di A sono < 1 .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Ed è vera perchè equivale a dire che $n \leq n + 1$, quindi 1 è maggiorante.

Si applica la proprietà degli estremi superiori:

$$L = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq L \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > L - \varepsilon \end{cases}$$

Riscritta e caratterizzata:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > 1 - \varepsilon$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \varepsilon$$

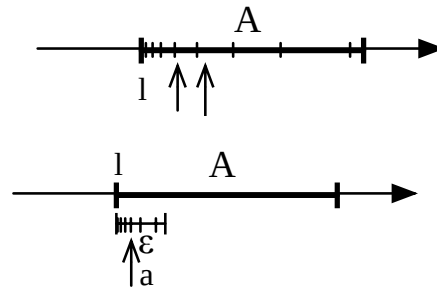
$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Esiste il più grande dell'insieme dei minoranti:

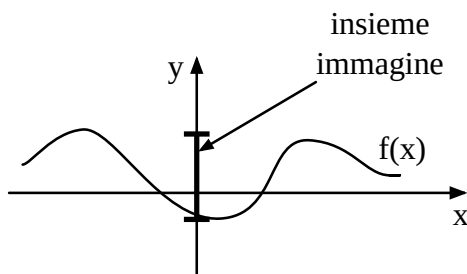
$l = \inf A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, l \leq a \\ \forall \mu > l, \exists a \in A : a < \mu \end{cases}$
 dove l è il minorante e per un numero μ che è maggiore del minorante, esiste un elemento di A tale che sta sotto μ .

$$\mu = l + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, l \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < l + \varepsilon \end{cases}$$



Estremi di funzioni reali



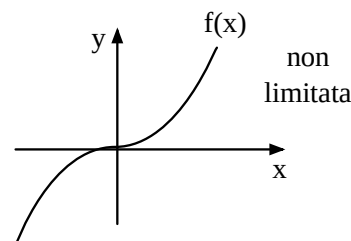
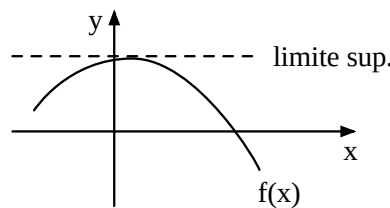
Studiando l'insieme immagine di una funzione, quindi l'intervallo di valori in cui vale $f(x)$, si nota che può avere o non avere maggioranti e/o minoranti, quindi si può dire che in base a questo la funzione è **limitata** o **non limitata**.

$$A = \text{dom } f$$

$$B \subset A, f(B) = \{f(x), x \in B\}$$

$$\text{im } f = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

La funzione f è limitata superiormente se $f(A)$ ha insieme immagine limitato superiormente. Se la funzione non ha estremo superiore (es. monotona strettamente crescente), quindi l'insieme immagine non ha maggioranti, allora si scrive che $\sup f = +\infty$.



Il massimo della funzione è dato dal massimo dell'insieme immagine:

$$\max f = \max[f(A)]$$

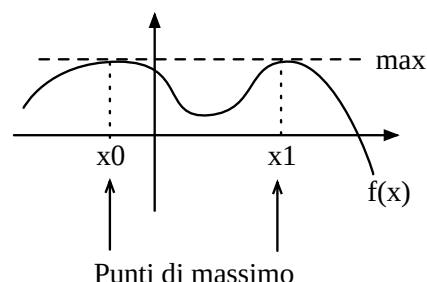
$$\min f = \min[f(A)]$$

Il **punto di massimo** è nel dominio, e corrisponde all'ascissa che produce il massimo nel codominio:

$$\exists x_0 \in A : f(x_0) = \mathcal{M}_A$$

Dire che $L \in \mathbb{R} : L = \sup f$ equivale a:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{maggiorante dentro im } f \\ \text{il più piccolo dei maggioranti} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \leq L \\ \forall \lambda < L, \exists x \in A : f(x) > \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \leq L \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : f(x) > L - \varepsilon \end{cases}$$

Proprietà

$$\sup(-f) = -\inf(f), \quad \inf(-f) = -\sup(f)$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad B \subset A$$

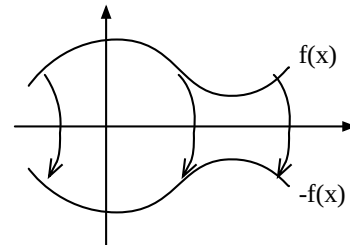
$$\sup_A f \geq \sup_B f \geq \inf_B f \geq \inf_A f \Rightarrow f(B) \subset f(A)$$

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

$$\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$$



Esempio

Trovare gli estremi della funzione $f(x)$ negli intervalli A e B .

$$f(x) = x^2$$

$$A = \{x : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}, \quad B = \{x : |x + 1| < 2\}$$

Innanzitutto si trovano A e B :

$$A = \{1 \leq x \leq 3\}, \quad B = \{-3 < x < 1\}$$

Nell'intervallo A , la funzione diventa monotona crescente, quindi l'estremo superiore è determinato nel punto maggiore delle ascisse:

$$\sup f = f(3) = 9 = \max f$$

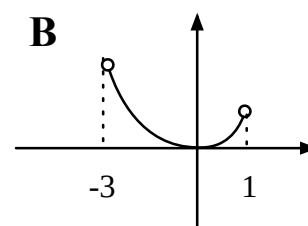
Quindi si ottiene che 3 è il punto di massimo per la funzione f ristretta nell'intervallo A . Si ottiene l'estremo inferiore con il valore minimo:

$$\inf f = f(1) = 1 = \min f$$

Mentre per l'insieme B , analogamente:

$$\sup f = 9 \text{ non max}$$

$$\inf f = 0 = \min f$$



Massimo e minimo locale

Un punto è di massimo locale di f se $\exists U_0 \in \mathcal{I}_{x_0} : x_0$ è punto di massimo per la restrizione a U_0 , quindi $\forall x \in U_0 \cap \text{dom } f, f(x) \leq f(x_0)$.

Se il punto è di massimo o minimo locale stretto, allora la disuguaglianza è stretta.