

Relazioni Binarie

Una relazione binaria tra due elementi x e y dati dal prodotto cartesiano di due insiemi A e B è un criterio che confronta i due elementi, il quale può essere verificato o non verificato, quindi si dice che gli elementi x e y sono in relazione oppure non sono in relazione.

Una relazione binaria solitamente si esprime con la simbologia xRy , per esempio $x \geq y$ oppure $x \subseteq y$ o $x \perp y$.

Proprietà

Una relazione binaria può godere di alcune proprietà:

Riflessiva:

$$\forall x \in X, xRx$$

Simmetrica:

$$xRy \Rightarrow yRx$$

Antisimmetrica:

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

Transitiva:

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

Relazioni di equivalenza

Si chiama equivalenza quella relazione binaria che sia riflessiva, transitiva, simmetrica. Due numeri equivalenti si scrivono $x \simeq y$, l'uguaglianza = viene detta equivalenza discreta.

Dimostrazione

Si verifica la proprietà di simmetria dato che:

$$(x, y)R(x_0, y_0) \text{ se } y - y_0 = x - x_0$$

Si verifica la proprietà transitiva:

$$(x, y) \simeq (x_0, y_0) \wedge (x_0, y_0) \simeq (x_1, y_1) \Rightarrow (x, y) \simeq (x_1, y_1)$$

(date la prima e la seconda condizione, verificare la terza)

La soluzione è una retta con pendenza 1 (x, y) passante per (x_0, y_0) , se passa anche per il terzo punto, allora sono equivalenti, quindi la proprietà è verificata.

Classe di equivalenza

Sia $\simeq$ una relazione di equivalenza su un insieme E , $\forall x \in E$ si definisce che:
(classe di x) $[x] = \{y \in E : y \simeq x\}$

I sottoinsiemi $[x]$ prendono il nome di classi dell'equivalenza data. Quindi una classe di equivalenza è un sottoinsieme di E che contiene solo elementi equivalenti ad x mediante $\simeq$.

Si ha quindi che:

$$\forall x, y \in E \rightarrow [x] = [y] \text{ (coincidono)} \vee [x] \cap [y] = \emptyset \text{ (disgiunti)}$$

Vedilo come due rette parallele, la equivalenza dice che due coppie di numeri per essere tali devono giacere sulla stessa retta con $m = 1$, ogni numero ha la sua retta, le rette dei due numeri possono essere solamente o coincidenti o disgiunte.

Insieme quoziente

È un insieme contenente tutte le classi di equivalenza di un insieme E che riguardano la stessa relazione.

$$E / \simeq = \{[x] : x \in E\}$$

Relazioni d'ordine

Una relazione binaria per cui valgono le proprietà riflessiva antisimmetrica e transitiva.

Esempi

1. La relazione $\leq$ in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
2. La relazione di inclusione in $\wp(E)$
3. Nota che $<$ **non** è propriamente una relazione d'ordine (prop riflessiva), viene chiamata "relazione d'ordine in forma antiriflessiva"

Relazioni di ordine totale

Una relazione d'ordine è totale quando qualunque coppia di elementi è confrontabile. Se due elementi di un insieme sono tra di loro inconfrontabili (per esempio per $\preceq$ vale che $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$) allora la relazione è di ordine parziale.

Esempio

Si consideri l'insieme delle parti $(\wp(E), \subset)$, si ha che è di ordine totale se e solo se contiene un elemento, altrimenti una coppia di elementi non può mai essere uno sottoinsieme dell'altro.

Maggioranti e minoranti

Se un insieme non ha estensione illimitata, esiste almeno un numero che sta dopo ogni elemento dello stesso.

$\mathcal{M}$ viene definito maggiorante per l'insieme A se $\forall a \in A, a \leq \mathcal{M}$

m viene definito minorante per A se $\forall a \in A, a \geq m$

Un insieme non è **limitato superiormente** se $\mathcal{M} = \emptyset$ o inferiormente se $m = \emptyset$. Quindi se $\exists m, a \in A : a < m$ (quindi esiste sempre un numero appartenente all'insieme che risulta minore di qualunque altro).

Quindi $\mathcal{M}_A = \emptyset \Leftrightarrow \neg(\exists n \in X : \forall a \in A, a \leq n) \Leftrightarrow \forall n \in X, \neg(\forall a \in A, a \leq n) \Leftrightarrow \forall n \in X, \neg \exists a \in A, a > n$ dove X rappresenta i maggioranti

Esempio

$A = [0,1[= \{x : 0 \leq x < 1\}$

$\mathcal{M}_A = \{x : x \geq 1\}$ nota che la funzione non è definita in 1

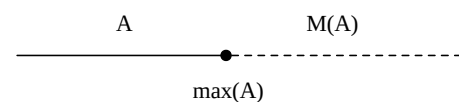
$A' = [0,1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$

$\mathcal{M}_A = \{x : x \geq 1\}$ perchè per $\mathcal{M}$ vale $\leq$, quindi anche uguale

Massimo e minimo di un insieme

Se A è limitato superiormente ($\mathcal{M} \neq \emptyset$) allora può esistere il **massimo**:

$M = \max A \Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_A \wedge M \in A$



Quindi deve appartenere ai maggioranti e deve fare parte di A . Il massimo **se esiste** è unico, e non esiste se:

- L'insieme non è limitato superiormente (es. $\mathbb{N}$)
- Il limite non è definito (es. $a < b$)

Stessa cosa per il minimo, se A è limitato inferiormente esiste il minimo, tranne se il limite non è definito. **Non confondere massimo con punto di massimo, il punto è la x che in una funzione dà il massimo in y .**

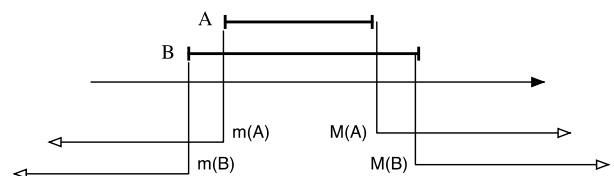
Esempio

Sia dato un intervallo $B = [0,1[$ si ha che $B \cap \mathcal{M}_B = \emptyset$ quindi non ha massimo.

Esempio

Si ha che un insieme $A \subset B$, ci si chiede qual è la relazione tra i maggioranti e tra i minoranti degli insiemi.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_B &\subset \mathcal{M}_A \\ m_B &\subset m_A\end{aligned}$$



Si ottiene che:

- Se esistono, $\max A \leq \max B$
- Se esistono, $\min A \leq \min B$

Estremo superiore e inferiore

Indicano **dove termina l'insieme**, ma non rappresentano punti come il massimo o di minimo. L'estremo superiore di un insieme A non vuoto è il più piccolo dei maggioranti dello stesso. Esiste se e solo se l'insieme è limitato superiormente e dice dove termina.

$$\sup A := \min \mathcal{M}_A$$

$$L = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq L \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a > L - \varepsilon \end{cases}$$

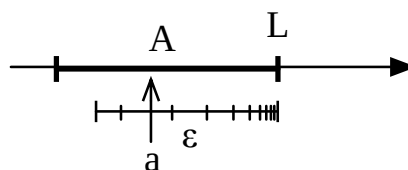
Dimostrazione

$$\forall a \in A, \forall n \in \mathcal{M}_A, a \leq n$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall n \in \mathcal{M}_A, \quad a \leq c \leq n$$

$$c \in \mathcal{M}_A, \quad c = \min \mathcal{M}_A$$

Quindi c è un maggiorante, ed è il minore di tutti.



Per (abuso di) convenzione si indica che $\sup A = \infty$ se l'insieme A non ha estremo superiore, anche se la notazione non è corretta.

Osservazione

Se A ha massimo, ha anche estremo superiore.

$$\max A = \sup A$$

Non ha massimo per esempio l'insieme $[0, 1[$ dato che per 1 non è definito.

Si possono trovare infiniti valori compresi maggiori di 0 e minori di 1, ma 1 non è mai incluso.

Stessa cosa con il minimo e l'estremo inferiore.

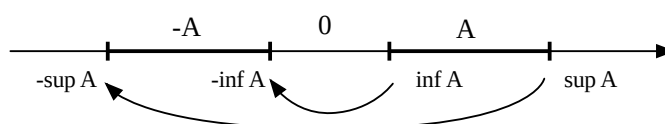
Esempio

$$A = [0, 1[$$

$$-A =] - 1, 0]$$

$$\inf -A = -\sup A$$

$$\sup -A = -\inf A$$



Osservazione

$$A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Un insieme A non è limitato inferiormente se

$$\forall n \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a < n$$

Per un insieme limitato superiormente e inferiormente esistono maggiorante e minorante:

$$\exists m, M : \forall a \in A, m \leq a \leq M$$

