

Serie Numeriche

Le serie numeriche servono per calcolare la somma di tutti i termini di una successione.

Data una successione $\{a_n\}_n$, si costruisce la **somma parziale n-esima** dei termini:

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

Come funzionamento è immediato, dato un intero n si calcola la sommatoria di tutti i termini della successione da 0 fino a n .

Una serie $\sum_0^\infty a_n$ converge ad un limite L se la successione delle somme parziali converge a L . Il limite si dice “somma della serie”.

Può esistere il limite $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} S_n = S$, e si indica con una sommatoria infinita $\sum_{n=0}^{+\infty}$. Una sommatoria con infiniti termini non ha senso, serve solo per indicare che si calcola il limite.

Una serie numerica può avere la notazione S_n oppure $\sum_n a_n$.

Limite di una serie

Data una successione $\{a_i\}_{i>n_0}$ definita dopo un certo n_0 :

$$S_n = \sum_{i=n_0}^n a_i \rightarrow S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \rightarrow \begin{cases} \text{converge,} & S \in \mathbb{R} \\ \text{diverge,} & S = \pm\infty \\ \text{indeterm,} & \nexists \lim_n S_n \end{cases}$$

Tipi

Serie geometrica

Data una serie di questo tipo, passando al limite si ottiene (dove q^i è il termine generale della serie):

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \nexists, & q \leq -1 \end{cases}$$

Serie armonica

Curiosità: il nome deriva dal fatto che i suoni armonici naturali hanno una lunghezza d'onda ottenuta da $\frac{1}{n}$ per l'armonico n .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Serie armonica generalizzata

$$q \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} \rightarrow \begin{cases} \text{converge,} & q > 1 \\ \text{diverge pos,} & q \leq 1 \end{cases}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow \text{converge}$$

Serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si riconduce alla forma esponenziale:

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Rappresentabile come:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

Per dimostrare che converge:

$$i \geq 1, \quad a_i = \frac{1}{i(i+1)}$$

Vengono sommati i primi n termini:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$$
$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$
$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

Se la successione tende a 1, allora anche la serie converge a 1.

Serie telescopica

$$a_i = b_i - b_{i+1}$$
$$S_n = \sum_{i=n_0}^n a_i = \sum_{i=n_0}^n b_i - b_{i+1}$$

Condizioni di convergenza

Serie convergente

Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora il carattere generale $a_n \rightarrow 0$, il viceversa non è detto.

Dimostrazione

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Se la serie converge vuol dire che la differenza tra un termine e il precedente è sempre più piccola, ma dato che la differenza tra un termine e l'altro è l'elemento che si somma progressivamente, allora questo elemento deve essere sempre più piccolo.

Segno costante

Se definitivamente $a_n \geq 0$ o $a_n \leq 0$ allora la serie ha sempre senso

Teorema di Cauchy

Condizione necessaria e sufficiente:

Una serie converge **se e solo se** è di Cauchy (la coda della oscillazione tende a 0):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall m, n \geq \bar{n}, |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Sappiamo che $m > n$, $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}^+$, quindi:

$$S_m - S_n = S_{n+k} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}$$

La serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^+, |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Condizione di assoluta convergenza

Una serie di termine generale a_n si dice assolutamente convergente se converge la serie $\sum_n |a_n|$.

$$\sum_n |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge}$$

Dimostrazione

Si generalizza la disuguaglianza triangolare:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|$$

Si fa uso del teorema di Cauchy, per ipotesi $\sum_n a_n$ converge, quindi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N}^+, |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon$$

Per disuguaglianza triangolare:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon$$

Questo ci dice che se cambia segno e converge a valori assoluti, allora converge.

Teoremi dei limiti per serie

Somma

Se la serie $\sum_n a_n$ converge e $\sum_n b_n$ converge, allora $\sum_n a_n + b_n$ converge.

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n + b_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$$

La somma vale anche per la divergenza, a patto che abbia senso (niente $+\infty - \infty$). Quindi è legittimo applicare la somma se e solo se il risultato ha senso.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!} + \frac{1}{3^n} \right) = e^2 - \frac{3}{2}$$

Prodotto

Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora converge anche la serie moltiplicata per una costante:

$$\sum_n c \cdot a_n \text{ conv } \forall c \in \mathbb{R}$$

Dato che si può fare uscire il termine c dalla sommatoria:

$$\sum_n c \cdot a_n = c \cdot \sum_n a_n$$

Non funziona se ci sono coinvolte due successioni. Solo con una costante.

Serie di segno non negativo

$$a_i \geq 0, \forall i$$

Se la serie non assume mai valori negativi, allora può solo convergere o divergere positivamente.

Dimostrazione

$$S_n - S_{n-1} = a_n > 0, \quad S_{n-1} \leq S_n \forall n$$

$\{S_n\}_n$ è definitivamente crescente, ha limite S .

Condizione necessaria:

Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$.

Dimostrazione

Per contronominale, se a_n non è infinitesima, allora non converge la serie, quindi può solo divergere positivamente.

Per notazione, se la serie ha limite si scrive che $\sum_n a_n < +\infty$.

Criteri di convergenza

Criterio di confronto puntuale

Date le successioni $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$ tale che $a_n \leq b_n$, allora:

- $\sum_n a_n = +\infty \Rightarrow \sum_n b_n = +\infty$ (b_n sta sopra a_n)
- $\sum_n b_n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$ (entrambe convergono)

Dimostrazione

A_n , B_n sono le somme parziali.

HP: $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \leq b_n$

$$A_n = A_{\bar{n}} + (A_n - A_{\bar{n}}) \text{ dove } A_n - A_{\bar{n}} = \sum_{i=\bar{n}+1}^n a_i$$

$$B_n = B_{\bar{n}} + (B_n - B_{\bar{n}}) \text{ dove } B_n - B_{\bar{n}} = \sum_{i=\bar{n}+1}^n b_i$$

Vale la disuguaglianza:

$$A_n - A_{\bar{n}} \leq B_n - B_{\bar{n}}$$

$$A_n = A_{\bar{n}} + (A_n - A_{\bar{n}}) \leq A_{\bar{n}} + (B_n - B_{\bar{n}}) = (A_{\bar{n}} - B_{\bar{n}}) + B_n$$

Se la serie a_n diverge positivamente, allora $A_n \rightarrow +\infty$, quindi per il teorema di confronto anche $B_n \rightarrow +\infty$, viceversa, se A_n converge allora B_n ha limite, quindi anche A_n ha limite.

Criterio di confronto asintotico

Si va a vedere il comportamento al limite. Se $a_n > 0$, $\forall n$, $b_n > 0$, inoltre:

$$\exists \lim_n \frac{a_n}{b_n} = L \in]0, +\infty[$$

Allora le due serie **hanno lo stesso carattere**. Solitamente si confronta una serie con una armonica generalizzata di cui si conosce il comportamento.

Dimostrazione

Si riconduce al criterio di confronto puntuale, si prende un intorno di l :

$$\text{def } \frac{a_n}{b_n} \in]\frac{L}{2}, 2L[$$

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L$$

Essendo $b_n > 0$ si possono moltiplicare i membri e ottenere:

$$\frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < 2L \cdot b_n$$

Se la serie $\frac{L}{2} \cdot b_n$ diverge, quindi anche a_n diverge, mentre se $2L \cdot b_n$ converge, allora a_n converge.
(un po' come il teorema dei carabinieri?)

Esempio

$$\sum_n \sin \frac{1}{n}$$

Si nota che $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (va come), quindi vale che:

$$\lim_n \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Ottenendo che la serie ha lo stesso carattere della serie armonica.

Esempio

$$\sum_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Si esegue il limite della successione:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Converge, condizione necessaria ma *non sufficiente*, si confronta la velocità con la serie armonica:

$$\sum_n \frac{1}{n^\beta} \rightarrow \begin{cases} \text{converge,} & \beta > 1 \\ \text{div. pos.,} & \beta \leq 1 \end{cases}$$

Raccogliendo $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \right) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

L'esponente è < 1 , diverge positivamente, quindi anche la serie diverge pos. per criterio di confronto asintotico.

Criterio radice n-esima

Data una serie $\sum_n a_n$ e $a_n \geq 0, \forall n$ e $L \in [0, +\infty]$:

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L \begin{cases} 0 \leq L < 1, & \text{serie converge} \\ L > 1, & \text{serie diverge pos.} \\ L = 1, & \text{non dice niente} \end{cases}$$

Dimostrazione – Importante

Per $L < 1$:

Fissiamo un intorno di L , delimitato a destra da $q = \frac{L+1}{2}$. Per la definizione,

se $L < 1$, def $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq q$.

$\sum_n q^n$ converge, quindi per il criterio di confronto puntuale, def $\sum_n a_n < +\infty$, chiamando $q^n = b^n$.

Per $L > 1$:

def $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ dato che deve stare nell'intorno, che non ha estremo destro.

def $a_n \geq 1$, quindi non è vero che la successione è infinitesima, quindi non converge, allora può essere solo divergente a $+\infty$.

Criterio rapporto

$a_n > 0 \forall n, \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \in [0, +\infty]$

Se esiste il limite L , allora se $L > 1$ la serie diverge, mentre se $L < 1$ allora converge.

Esempio

$$\sum_n \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La serie converge, ma il segno di x cambia il segno della serie. Si applica il criterio di assoluta convergenza $|a_n|$:

$$\sum_n \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_n \frac{|x|^n}{n!}$$

Quindi è assolutamente convergente, dato che non si considera il segno.

$$|a_n| = b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

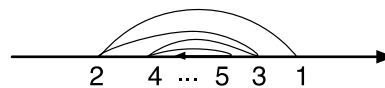
Criterio di Leibniz

Si applica alle serie con segno alterno.

Sia $a_n \geq 0, \forall n, \{a_n\}_n$ è infinitesima e

debolmente decrescente, allora

$\sum_n (-1)^n a_n$ converge.



Dimostrazione

$$S_{n+2} = S_n + (-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+2} \cdot a_{n+2}$$

Per n pari il segno è positivo, quindi:

$$= S_n + (-1)^{n+1} \cdot [a_{n+1} - a_{n+2}]$$

Il secondo termine dentro le parentesi quadre è ≥ 0 , il segno di tutto dipende dal $(-1)^{n+1}$. Sia per n pari che n dispari, esiste il limite.

$$S_{n+2} < S_n$$

Se si dimostra che il limite per il posto pari è uguale al limite per il posto dispari, allora è dimostrata. (una serie cresce fino al limite, l'altra decresce)

SP – Posto pari:

Se è debolmente crescente, il limite è positivo o infinito.

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_2 \quad \forall n$$

Dove S_1 agisce da minorante e S_2 da maggiorante, quindi la successione è limitata inferiormente e superiormente.

SD – Posto dispari:

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$$

Tutte le somme pari sono sopra le somme dispari, entrambe sono debolmente monotone e limitate, quindi possono solo convergere.

Converge pur non essendo assolutamente convergente.

Osservazione

Questa serie converge sempre per il criterio di Leibniz:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

Se $\alpha > 1$ allora è anche assolutamente convergente.

Criterio dell'integrale

A volte si può ricondurre lo studio di una serie allo studio di un integrale improprio.

Sia $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ debolmente decrescente e infinitesima, poniamo $a_n = f(n)$. Esiste $\sum a_n$ che ha senso (composta solo da termini positivi) ed è finita o $+\infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ e } \int_0^{\infty} f(x) dx \text{ hanno lo stesso carattere}$$

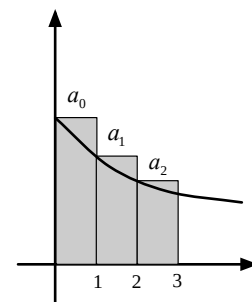
Costruendo l'integrale che contiene la serie:

$$a_0 = f(0)$$

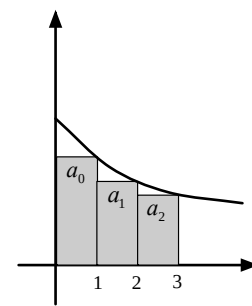
$$\int_0^3 f(x) dx \leq a_0 + a_1 + a_2$$

$$\int_0^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_n \int_0^n f(x) dx$$



Per l'integrale contenuto:



$$\int_0^{n+1} f(x) dx \geq \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k \right) - a_0$$

Quindi l'integrale è compreso tra le due serie:

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k \right) - a_0 \leq \int_0^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n a_k$$

Se l'integrale diverge, la serie diverge, se converge, la serie converge, quindi hanno lo stesso carattere. La formula riesce inoltre a dare una stima di quanto manca per la somma di tutti gli altri elementi.

Esempio

Data la serie, si vuole approssimare ad $\frac{1}{100}$ il risultato, essendo convergente (serie armonica generalizzata):

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

Si calcola la somma parziale:

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

A questo punto si sceglie quali primi termini prendere per avere un errore massimo di $\frac{1}{100}$:

$$|s_n - A| < \frac{1}{100}$$

Essendo una serie a termini positivi, più è grande A , più diventa piccolo $s_n - A$, quindi la coda della serie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Si deve trovare un numero n per il quale la espressione risulta $< \frac{1}{100}$.

Dimostrazione 0. $\bar{9}$

È possibile dimostrare che $0.\bar{9} = 1$ con una serie geometrica.

$$0.\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n =$$

Si rimuove un termine della somma:

$$= 9 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n - 1 \right] = 9 \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right] = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

Riordinamento degli elementi

In alcuni casi, se si sommano gli elementi di una serie in un ordine diverso, è possibile ottenere risultati diversi.

- Se la serie è assolutamente convergente, allora si può riordinare e il risultato non cambia
- Una serie a termini positivi, se è convergente si può riordinare
- Se una serie converge, ma non è assolutamente convergente, allora si potrebbe ottenere un risultato diverso, dire che converge non vuol sempre dire che sia la parte positiva che la parte negativa convergono.