

Sottosuccessioni

Una sottosuccessione consiste nella **restrizione in un sottoinsieme infinito** di una successione, formalmente la composizione di una successione con k , che è una applicazione crescente $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (quindi un tipo di successione).

$$a_n = f(n)$$

Per esempio, se $\{a_n\}_n$ è una successione, sono sottosuccessioni $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{2n+1}$. Si sostituisce a n un'altra applicazione.

Come altro esempio si consideri la successione dei numeri interi naturali, è una possibile sottosuccessione la successione dei numeri pari.

Tipi

Di posto pari:

$$b_n = a_{2n}, \quad b_n = f \circ k_1(n), \quad k_1(n) = 2n$$

Di posto dispari:

$$b_n = a_{2n+1}, \quad b_n = f \circ k_2(n), \quad k_2(n) = 2n + 1$$

Si nota per le applicazioni k_n che per la funzione definita su numeri naturali, strettamente crescente, se la successione tende a un valore l , allora anche la sottosuccessione pari o dispari tende a lo stesso valore.

Quindi la sottosuccessione di una successione $a_n = f(n)$ è la composizione di funzioni $f \circ k(n)$ con $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

La seguente forma indica che per il valore n del dominio, la funzione k produce k_n :
 $k(n) = k_n$

La sottosuccessione si scrive a_{k_n} , per esempio una sottosuccessione di a_n può essere a_{n^2} , dato che si applica la funzione all'indice.

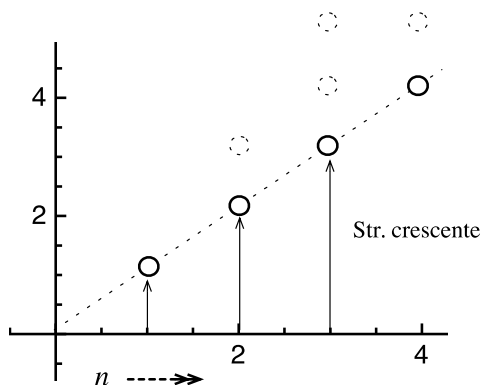
Proprietà sottosuccessioni str. cresc

Se $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una applicazione **strettamente crescente** allora $k(n) \geq n \forall n$.

Dimostrazione

Si dimostra tramite il principio di induzione, la disuguaglianza viene chiamata $\mathcal{P}(n)$:

- $\mathcal{P}(0)$ è vera dato che $k(0) \geq 0$
- $\mathcal{P}(n)$ vera, $k(n) \geq n$
- $\mathcal{P}(n+1)$ vera, $k(n+1) > k(n)$ dato che str. cresc.
- $k(n) > n$ per ipotesi induttiva



$$k(n+1) > k(n) \geq n$$

Se si dice che $k(n+1) > n$ allora si sta dicendo che $k(n+1) > n+1$

Quindi tramite induzione si ha che per una applicazione str. cresc, $k(n) > n$.

Proprietà del limite

Se $a_n \rightarrow l$, allora ogni sottosuccessione ha limite l .

Dimostrazione

HP: $\forall V \in \mathbb{I}l, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in V$

Prendiamo la sottosuccessione a_{k_n} , sappiamo che se $n \geq \bar{n}$, allora per la proprietà precedente anche $k(n) \geq n \geq \bar{n}$. Si ha che $k(n) > \bar{n}$ quindi usando la ipotesi, $a_{k_n} \in V$ quindi anche la sottosuccessione ha limite l .

Applicazione su sottoinsieme di $\mathbb{N}$

$\forall n$, sia A_n un insieme infinito di indici $\in \mathbb{N}$, $A_n \subset \mathbb{N}$, A_n infinito.

$\exists k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ str. cresc. : $k(n) \in A_n \forall n$

Quindi esiste sempre una applicazione k i cui elementi facciano parte dell'insieme A_n qualunque esso sia.

Dimostrazione

La proposizione si dimostra tramite il principio di induzione e il principio del minimo intero.

Chiamiamo $k(0) = \min A_0$, esiste per minimo intero.

Definito $k(n)$ poniamo $\tilde{A}_{n+1} = \{m \in A_{n+1} : m > k_n\}$, ci serve sapere che si tratta di un insieme di naturali non vuoto, perché per ipotesi A_n è infinito.

Se $\tilde{A}_{n+1}$ fosse vuoto, allora dopo $k(n)$ non ci sarebbe nessun suo elemento, dato che sono tutti minori. Ma siccome sono indici naturali, A_{n+1} avrebbe un numero finito di elementi, e non è possibile.

Quindi $k(n+1) = \min \tilde{A}_{n+1}$, la applicazione è definita.

$k(0)$ è definito, supposto $k(n)$ è definito anche $k(n+1)$, quindi k è definita su tutti i naturali, per induzione ha valori naturali, ed è definita la applicazione $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Dobbiamo far vedere che è strettamente crescente, $\forall n, k(n+1) > k(n)$.

$k(n+1) = \min \tilde{A}_{n+1}$ quindi appartiene all'insieme, ed è uno degli indici $m > k_n$, quindi viene data la proprietà di monotonia.