

# Componenti reattivi

Mc128k

## Contenuti

Fondamenti su condensatori e induttanze, circuiti RC, RL, RLC, serie e parallelo, circuiti magnetici

## Indice

<b>1</b>	<b>Condensatore</b>	<b>2</b>
1.1	Rigidità dielettrica . . . . .	3
1.2	Capacità parassita . . . . .	3
1.3	Legge ai morsetti . . . . .	4
1.4	Tasso di autoscarica . . . . .	5
1.5	Potenza ed energia . . . . .	5
1.6	Circuito RC . . . . .	6
1.6.1	Tensione nel tempo . . . . .	6
1.6.2	Corrente nel tempo . . . . .	8
1.6.3	Scarica del condensatore . . . . .	9
1.7	Condensatori in parallelo . . . . .	10
1.8	Condensatori in serie . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Induttanza</b>	<b>10</b>
2.1	Permeabilità magnetica . . . . .	11
2.2	Legge di Faraday-Lenz . . . . .	14
2.3	Circuiti magnetici . . . . .	15
2.4	Induttore . . . . .	16
2.5	Transitorio di carica della induttanza . . . . .	17
2.6	Induttanze in serie . . . . .	20
2.7	Induttanze in parallelo . . . . .	20
2.8	Scarica di una induttanza . . . . .	21

# 1 Condensatore

I condensatori sono componenti che hanno caratteristiche più utili per quando si lavora in corrente alternata piuttosto che in corrente continua. Fondamentalmente si può vedere un condensatore come un accumulatore, ma in realtà ha altre proprietà che dipendono da fenomeni elettrostatici.

Si può schematizzare un condensatore come una coppia di lamine di materiale conduttore separate da un sottile strato di materiale dielettrico.

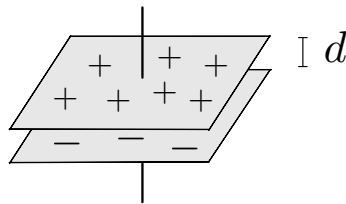


Figura 1: Condensatore

Una delle due lamine può essere caricata aggiungendo o togliendo elettroni. Questo induce una carica uguale e opposta sull'altra lamina; le cariche *non* si muovono da una lamina all'altra, quindi non si forma una corrente costante tra i poli, ma solo quella necessaria per arrivare alla saturazione rispetto alla tensione in entrata.

Da Fisica si ha la formula che descrive il campo elettrico, dove  $\varepsilon$  rappresenta la costante del dielettrico e  $S$  la superficie:

$$|E|[V/m] = \frac{Q}{\varepsilon S} \quad (1.1)$$

La costante  $\varepsilon$  è una caratteristica dal materiale presente fra le lamine, e si ottiene moltiplicando quella del vuoto con la capacità dielettrica relativa del materiale:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad (1.2)$$

La tensione fra i poli e la capacità elettrica si ottengono con le formule:

$$V_{AB} = -E \cdot d \quad (1.3)$$

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} \quad (1.4)$$

Dove la capacità elettrica rappresenta quanta carica serve per raggiungere una certa differenza di potenziale tra i morsetti. Si misura in Farad, ma essendo una unità di misura molto grande, si utilizzano sottomultipli, come  $\mu F$ .

$$C[F] = \frac{Q}{|V_{AB}|} = \frac{Q}{|E| \cdot d} = \varepsilon \frac{S}{d} \quad (1.5)$$

## 1.1 Rigidità dielettrica

È il massimo valore del campo elettrico prima che il materiale si danneggi a causa di una scarica fra le lamine, causata da uno svincolamento degli elettroni. Il condensatore viene definitivamente distrutto una volta passata la scarica.

Per esempio la costante dielettrica dell'aria secca è di  $3MV/m$ , quindi ci vogliono 3 MegaVolt per generare una scarica tra due lamine a distanza di un metro. Se l'aria viene inumidita la costante cala, e questo permette la generazione di fulmini durante un temporale.

La capacità di un condensatore può quindi essere aumentata in diversi modi:

- Diminuire la distanza (limitato da  $\varepsilon$ )
- Aumentare la superficie
- Costante dielettrica maggiore

Nei condensatori reali viene indicata la capacità in sottomultipli del Farad e la tensione massima operativa.

## 1.2 Capacità parassita

Un parametro parassita è una caratteristica che un componente non dovrebbe avere; per esempio un filo elettrico ha una resistenza interna, anche se viene considerato equipotenziale, oppure un elemento di quarzo funziona anche come condensatore, avendo lamine a poca distanza fra loro.

In particolare i fili elettrici, se posti a breve distanza, possono presentare fenomeni di capacità parassita. I cavi coassiali fanno in modo di ridurre il fenomeno ponendo il conduttore all'interno di una schermatura metallica, che effettivamente forma un condensatore con quello interno, ma viene scaricato poi a massa.

Il cavo coassiale possiede una caratteristica capacitiva per ogni metro, quindi  $F/m$ , misurata allo stesso modo della resistenza parassita  $\Omega/m$ .

### 1.3 Legge ai morsetti

Si vuole avere una legge ai morsetti del condensatore che possa mettere in relazione la tensione con la corrente. In altre parole si vuole avere una coppia di funzioni tali che:

$$V_{AB} = f(I) \quad (1.6)$$

$$I = f'(V_{AB}) \quad (1.7)$$

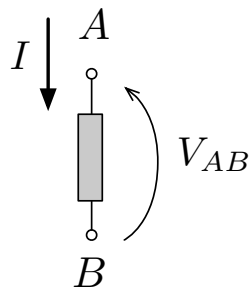


Figura 2: Bipolo

In un condensatore, la tensione ai capi e la corrente per accumulare energia non sono fissi, ma variano con il tempo. In questo caso si indicano con lettere minuscole in quanto tali (fig.3) e con  $T_x$  il punto in cui viene accumulata la carica massima.

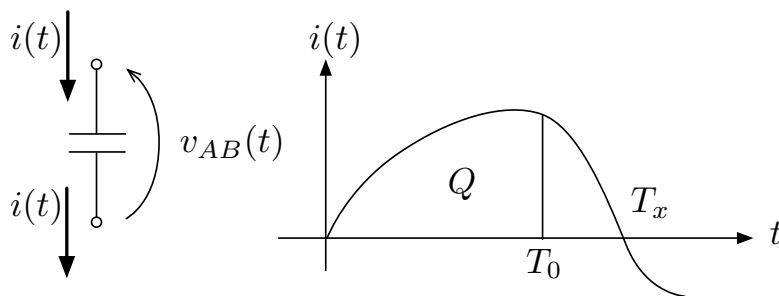


Figura 3: Corrente in funzione del tempo

Come si può osservare anche dal grafico la carica è data dall'integrale nel tempo della corrente in entrata (l'area sottesa) più la capacità già presente nel condensatore ( $V_{C0}$ ).

$$v_{AB}(t) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau + V_{C0} \quad (1.8)$$

Per non eseguire l'integrale si può cercare la corrente in funzione del tempo invece che la tensione:

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} V_{AB} \quad (1.9)$$

## 1.4 Tasso di autoscarica

Essendoci un integrale (o derivata), per calcolare il valore futuro della corrente in entrata (e uscita) bisogna avere i valori passati, per questo si dice che è un **componente con memoria**.

I condensatori però non mantengono la carica in eterno, ma tendono a perderla lentamente, dato che ogni isolante possiede comunque un valore di resistenza seppur alto.

Si può immaginare l'esistenza di una resistenza che congiunge i piatti del condensatore, di valore molto alto. In molti casi questo fenomeno non influisce circuiti reali, ma per esempio le DRAM dei computer sono influenzate dal tasso di autoscarica, essendo composte da miliardi di microscopici condensatori con lamine molto vicine; in questo caso è presente un circuito di refresh che rigenera la carica all'interno ogni pochi millisecondi. La energia persa dovuta all'autoscarica si trasforma in calore.

## 1.5 Potenza ed energia

Supponiamo di avere un condensatore con qualche carica presente su una delle lamine. Se si continua a fornire corrente si aumenta la carica presente all'interno; la carica in più è naturalmente data dalla corrente in entrata, ma dato che essa provoca una corrente in uscita presso l'altro polo, si può concettualizzare che le cariche "vanno da una lamina all'altra", senza passare per il dielettrico, ma attraverso il filo, anche se non si tratta delle stesse cariche.

Da Fisica si sa che quando si sposta una carica attraverso una differenza di potenziale, si compie un lavoro; indicando la tensione ai capi del condensatore con  $v_c(t)$

si ha la formula del lavoro infinitesimo, quindi per carica:

$$dL = v_c(t) \cdot dq \quad (1.10)$$

Il lavoro totale per immagazzinare una carica  $Q$  in un condensatore inizialmente scarico si ottiene facendo la somma di tutte le cariche che si spostano da una lamina all'altra:

$$L = \int_0^Q v_c(t) dq = \int_0^Q \frac{q(t)}{c} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c} = \frac{1}{2} CV_c^2 \quad (1.11)$$

Il condensatore, durante la fase di carica, si comporta come un utilizzatore, e durante la fase di scarica come un generatore. Non potendo comunque generare più energia di quella introdotta, si considera sempre come un utilizzatore.

La potenza spesa mentre si carica il condensatore si ottiene:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} C \frac{d(v_c^2(t))}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (1.12)$$

Dove la derivata rimane perché  $v_c$  è una funzione sconosciuta. La potenza assorbita o generata è proporzionale alla derivata della tensione, che dovrà quindi essere una funzione continua che non varia istantaneamente.

Se così non fosse, e si avesse un gradino nell'andamento della tensione, la potenza risulterebbe un delta di Dirac, quindi una potenza istantanea infinita, ma questo sarebbe assurdo da produrre realmente (a detta del prof, neanche Chuck Norris riesce a farlo). Di conseguenza è impossibile caricare istantaneamente un condensatore.

## 1.6 Circuito RC

### 1.6.1 Tensione nel tempo

All'inizio il condensatore ha una carica interna  $C_0$  che produce una tensione ai capi uguale a  $V_{C_0}$ , sicuramente deve essere maggiore di zero ma minore della tensione in entrata:

$$\begin{cases} V_{C_0} > 0 \\ V_{C_0} < E \end{cases} \quad (1.13)$$

Quando si chiude l'interruttore viene innescata una corrente che impone una tensione uguale a quella del generatore ai capi del condensatore. Man mano che il

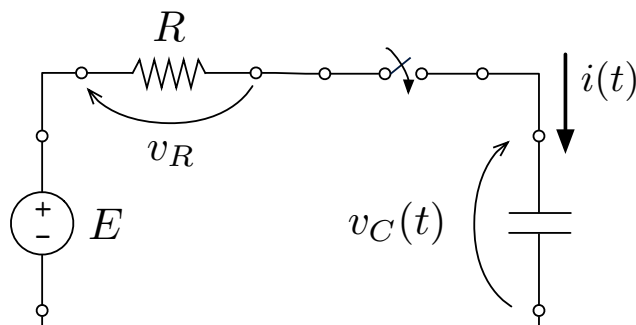


Figura 4: Circuito di riferimento

condensatore si carica, il potenziale ai capi di esso aumenta e per la seconda legge di Kirchhoff il potenziale ai capi del resistore diminuisce.

Se la tensione ai capi del condensatore dovesse mai arrivare a  $E$  (e non lo farà mai perchè ci arriva asintoticamente) questo implicherebbe una corrente uguale a zero e una differenza di potenziale ai capi della resistenza nulla.

Il grafico dell'andamento della tensione rispetto alla corrente si può quindi costruire con i regimi trovati:

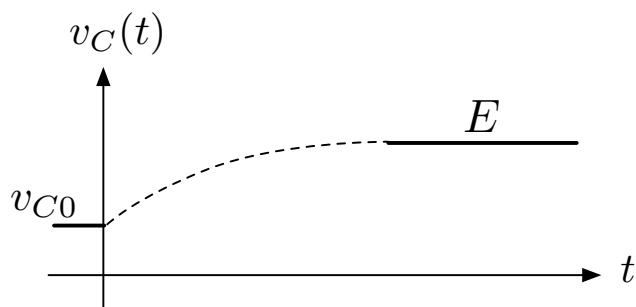


Figura 5: Regime iniziale e finale

Si ipotizza che possa esistere un momento  $T_f$  per cui la tensione finale ai capi del condensatore sia uguale a  $E$ . La funzione deve essere evidentemente monotona crescente, ma ancora non si conosce lo stato di transitorio. Sempre con la seconda

legge di K. si costruisce la uguaglianza:

$$E = v_R(t) + v_C(t) = Ri(t) + v_C(t) = RC \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad (1.14)$$

La equazione ottenuta è differenziale di primo grado, avendo la incognita dentro una derivata. Ciò che si ottiene è l'andamento nel tempo della incognita  $v_C(t)$ .

$$E.C. : RC\alpha + 1 = 0 \quad (1.15)$$

$$\alpha = -\frac{1}{RC} \quad (1.16)$$

$$v_{SOA}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (1.17)$$

$$v_{IP}(t) = E \quad (1.18)$$

$$v_C(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + E \quad (1.19)$$

$$v_C(0) = V_{C0} \Rightarrow K_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + E = V_{C0} \rightarrow K_1 = V_{C0} - E \quad (1.20)$$

$$v_C(0) = (V_{C0} - E) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + E \quad (1.21)$$

L'andamento del grafico durante il transitorio è quindi asintotico, e si avvicina sempre di più al valore  $E$  senza mai arrivarci.

A livello pratico si considera un tempo ragionevole per cui il condensatore si può considerare carico vicino al 99% della carica completa. Definendo una costante di tempo del transitorio come  $\tau = RC$  (più è piccola più arriva velocemente alla carica totale), si può dire che per convenzione quando  $t = 5\tau$  (99% della carica) esso si può considerare completamente carico.

Quando  $t = \tau$  la carica accumulata è circa del 63%. Le percentuali si riferiscono sempre all'**escursione prevista**, quindi se il condensatore ha già al suo interno una carica residua, il 99% si riferisce alla differenza tra il potenziale corrente e quello a cui deve arrivare, non come se partisse da 0V.

### 1.6.2 Corrente nel tempo

Per studiare il transitorio della corrente si applica la seconda legge di Kirchhoff:

$$E = v_C(t) + Ri(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t)dt + Ri(t) \quad (1.22)$$



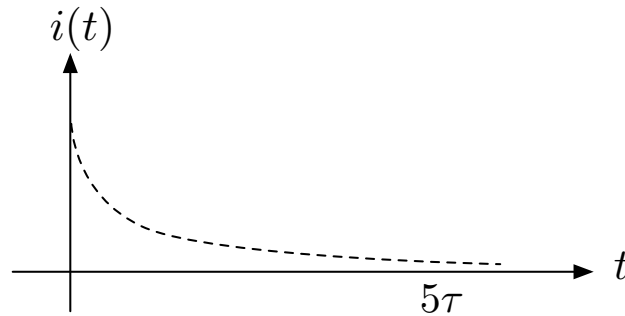


Figura 6: Andamento della corrente

La equazione trovata risulta essere differenziale di primo grado. Si calcola da  $-\infty$  per indicare (a livello matematico) la condizione di quando era scarico "all'inizio del tempo", quindi  $V_{C0}$  non si conta. Riordinando i termini:

$$RC \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0 \quad (1.23)$$

Risolvendo la equazione differenziale:

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (1.24)$$

### 1.6.3 Scarica del condensatore

Prendendo un condensatore carico, si mettono in cortocircuito i poli del circuito (non del condensatore ideale dato che farebbe esplodere l'universo con una corrente infinita). Sempre con la seconda legge di Kirchhoff si costruisce una equazione differenziale:

$$0 = v_C(t) + Ri(t) = v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1.25)$$

$$v_C(t) = E e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (1.26)$$

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (1.27)$$

Osservando i grafici si nota che la corrente presenta una discontinuità (da zero va istantaneamente a  $-\frac{E}{R}$ , mentre la tensione non può farlo).

## 1.7 Condensatori in parallelo

Quando due o più condensatori sono in parallelo, le capacità si sommano.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (1.28)$$

Questo vale anche per le tensioni, mentre la corrente varia a seconda delle capacità:

$$i = C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} \quad (1.29)$$

## 1.8 Condensatori in serie

Il duale dei condensatori in parallelo, in questo caso si fa la somma inversa:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (1.30)$$

Come per le resistenze, per due soli condensatori si può semplificare il calcolo:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (1.31)$$

## 2 Induttanza

Un filo percorso da una corrente produce sempre un campo magnetico.

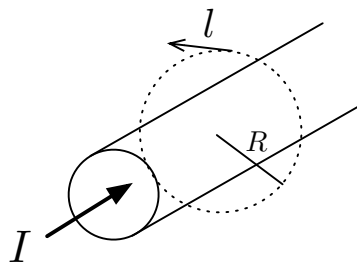


Figura 7: Campo magnetico di un filo

La legge di circuitazione di Ampère afferma che una corrente genera un campo magnetico, quindi la corrente è data dalla somma dei contributi di campo magnetico (vettore) nella circonferenza posta a distanza  $R$  dal centro.

$$\vec{H} \cdot \oint_l d\vec{l} = I \quad (2.1)$$

$$|H| \cdot 2\pi R = I \quad (2.2)$$

Se ci si mette a distanza  $R$  dal filo percorso da corrente  $I$  si viene sottoposti ad un campo magnetico di intensità  $\frac{I}{2\pi R} = |H|$  con direzione tangente alla circonferenza.

Volendo accumulare campo magnetico si può avvolgere il filo in un elemento toroidale, indicando con  $N$  il numero di avvolgimenti; il campo ottenuto sarà dato dalla somma di tutti i contributi, quindi  $N$  volte quello del singolo avvolgimento.

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = NI := I_C \quad (2.3)$$

Se si prende una linea chiusa all'esterno dell'avvolgimento ( $l'$  in fig.8b) si nota che il campo magnetico risulta nullo, stessa cosa per quello che riguarda una linea presa vicino al centro. La lunghezza che effettivamente serve è quella del toroide contenuto dalle spire:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H \cdot L \quad (2.4)$$

Ottenendo quindi:

$$H[A/m] = I \cdot \frac{N}{L} \quad (2.5)$$

Questo vale anche per un "toroide con raggio infinito", quindi un solenoide, quello che conta è la densità di spire.

L'intensità del campo dipende quindi dalla densità di spire e dalla corrente in entrata. Le linee del campo magnetico sono sempre chiuse, quindi nel caso dell'induttore toroidale sono interamente contenute nel nucleo, e per il solenoide escono ed entrano dai capi. La formula che si applica per questo oggetto è la 2.5.

## 2.1 Permeabilità magnetica

Esiste un campo  $\vec{B}$  detto di **induzione magnetica** (o densità di flusso magnetico), misurato in Tesla, dato dal campo magnetico moltiplicato per una costante  $\mu$  che

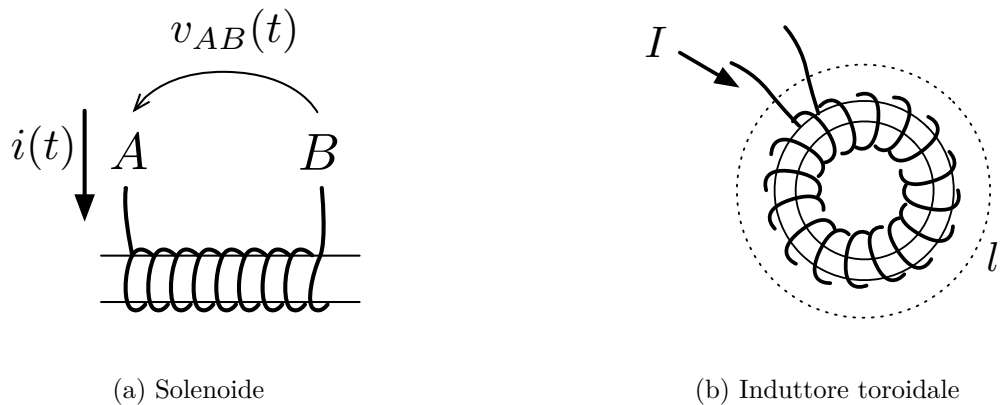


Figura 8: Induttori

dipende dal materiale usato come nucleo, detta **permeabilità magnetica**.

$$\vec{B}[T] = \mu \vec{H} \quad (2.6)$$

Questo implica che  $\vec{H}$  non dipende dal materiale, anzi, viene alterato a seconda della costante  $\mu$  applicata. La permeabilità magnetica, come la costante dielettrica, si scompone in due parti,  $\mu_0$  che è la permeabilità magnetica nel vuoto e  $\mu_R$ , quella relativa del mezzo:

$$\mu[N/A^2] = \mu_0 \cdot \mu_R \quad (2.7)$$

Esistono diversi tipi di materiali che variano a seconda della permeabilità magnetica:

- Materiali diamagnetici,  $\mu_R < 1$ , oppongono un debole campo magnetico a quello esterno
- Materiali paramagnetici,  $\mu_R > 1$ , forniscono un piccolo contributo al campo magnetico
- Materiali ferromagnetici,  $\mu \gg 1$ , si polarizzano a seconda del campo magnetico e possono "memorizzare" una direzione.

I materiali ferromagnetici sono a livello microscopico divisi in partizioni dette "domini di Weiss", ognuna con una polarità casuale rispetto alle altre. In presenza di un campo magnetico, i domini si orientano (non completamente) favorevolmente ad esso, con l'effetto che tutti i domini contribuiscono all'intensità del campo magnetico.

Non si può mai arrivare alla situazione in cui ogni singolo dominio è perfettamente allineato al campo, essendo un andamento asintotico, ma si può determinare dopo una certa intensità del campo magnetico che il materiale sia "saturato".

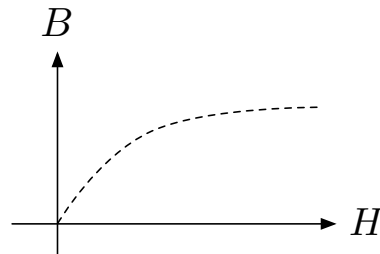


Figura 9: Saturazione di un materiale

Se dopo viene spenta la sorgente di campo magnetico, i domini di Weiss non tornano esattamente al loro posto, ma tendono a mantenere una leggera polarizzazione in direzione del campo passato, quindi in presenza di campo 0 la induzione magnetica  $B$  non è nulla.

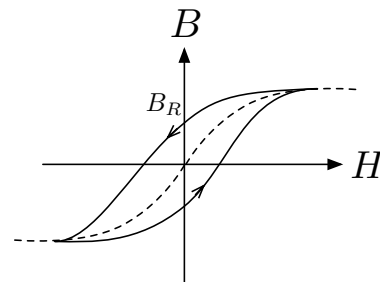


Figura 10: Curva di isteresi

Questo fenomeno viene rappresentato dalla cosiddetta **curva di isteresi magnetica** in fig.10. Si parte dalla curva di prima magnetizzazione (Quella tratteggiata), aumentando il campo  $H$  si arriva alla saturazione, quando si torna indietro si incontra il punto  $B_R$  a campo zero, ogni materiale ha un valore massimo; se poi il campo diventa negativo viene percorsa la seconda curva (quella in basso), che eventualmente arriverà a  $-B_R$ .

La smagnetizzazione di un materiale avviene percorrendo diverse volte la curva di isteresi per fare in modo di ridurre in modo incrementale il valore  $B_R$ ; la oscillazione

si può notare per esempio nei vecchi schermi CRT quando venivano "smagnetizzati" all'avvio.

## 2.2 Legge di Faraday-Lenz

Un campo magnetico, oltre ad essere generato da una corrente, può a sua volta generarne una. La corrente (quindi la differenza di potenziale) viene formalizzata dalla legge di Faraday-Lenz, si ha quindi tutto il passaggio dalla legge di Ampère, attraverso la permeabilità magnetica a questo caso:

$$I \xrightarrow{\text{Ampere}} H \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\text{F-Lenz}} E \quad (2.8)$$

La legge indica che la tensione indotta  $e$  da un campo magnetico è data da:

$$e_2 = -\frac{d\phi_C}{dt} \quad (2.9)$$

Il **flusso magnetico**, misurato in Weber, è dato dal prodotto del campo di induzione magnetica  $B$  e la sezione del nucleo  $S$ , e il flusso concatenato è dato dal prodotto del flusso per il numero di spire:

$$\phi[\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2] = B \cdot S \quad (2.10)$$

$$\phi_C = \phi \cdot N \quad (2.11)$$

Quindi la tensione in uscita risulterà:

$$e_2 = -\mu_2 \cdot S \cdot \frac{dB}{dt} \quad (2.12)$$

Essendo una derivata nel tempo, per produrre una tensione non si può avere un campo "fermo", ma deve variare in continuazione.

Per quello che riguarda il segno negativo, il contributo di Lenz, bisogna notare che il campo induce una tensione  $e_1$  anche sull'avvolgimento che lo ha generato, ma se questo non si opponesse, allora si formerebbe una induzione infinita fra tensione e campo, e l'universo esploderebbe. Grazie, Lenz, per averci illuminato.

## 2.3 Circuiti magnetici

Le linee di forza del campo magnetico si possono vedere come contenute in un "tubo di flusso" di sezione  $S$ . Le linee possono allargarsi o restringersi, ma rimangono sempre le stesse, non se ne creano nè distruggono altre.

Si può quindi dichiarare il prodotto della densità di flusso per la sezione costante:

$$B \cdot S = \phi = \text{cost} \quad (2.13)$$

Per lavorare in modo più semplice con circuiti magnetici si possono identificare similitudini con le leggi studiate finora, in particolare quella di Ohm, in questo modo si possono anche applicare tutti i metodi di risoluzione. Bisogna identificare grandezze analoghe di  $V$ ,  $I$ ,  $R$ , per esempio il flusso costante può essere paragonato alla corrente. Studiando un toroide aperto come in fig.11 con una apertura  $l_0$  si

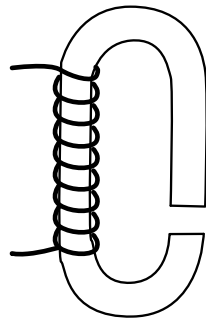


Figura 11: Toroide aperto

osserva che le linee di forza sono concentrate all'interno del materiale, mentre all'apertura tendono ad "allargarsi" distanziandosi tra di loro, per poi rientrare nel toroide.

Supponendo che  $l_{fe}$  (la lunghezza del toroide) sia molto minore di  $l_0$  si può considerare il tubo di flusso come di sezione costante, dato che l'allargamento è poco significativo.

La densità di flusso è quindi considerabile come costante, quindi c'è la stessa induzione magnetica lungo tutto il percorso:

$$\phi = B \cdot S = \text{cost} \cdot \text{cost} \implies B = \text{cost} \quad (2.14)$$

Essendo i materiali diversi (ferro e aria) risulta che  $H_0 \gg H_{fe}$  dato che la densità di flusso è stata dichiarata come costante. Per il teorema di circuitazione di Ampère vale che:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = N \cdot I \implies H_{fe} \cdot l_{fe} + H_0 \cdot l_0 = N \cdot I \quad (2.15)$$

Ipotizzando di avere diversi materiali oppure diverse aree si ha che:

$$\sum_i H_i l_i = N \cdot I \quad (2.16)$$

Eseguendo operazioni algebriche e ipotizzando  $\phi$  come costante si ottiene una forma simile alla legge di Ohm:

$$\phi \sum_i \frac{l_i}{S_i \mu_i} = N \cdot I \quad (2.17)$$

La parte interna alla sommatoria viene chiamata **riluttanza**, e da ciò si ottiene la **legge di Hopkinson**, dove  $N$  indica il numero di spire,  $I$  la corrente e  $\mathcal{R}$  la riluttanza:

$$N \cdot I = \mathcal{R} \phi \quad (2.18)$$

Le similitudini rispetto alla legge di ohm si notano osservando che  $NI$  si può paragonare alla tensione (detta qui **forza magnetomotrice**),  $\mathcal{R}$  si vede come la resistenza e  $\phi$  la corrente.

La stessa riluttanza si può vedere come somma di tutti i singoli contributi nel circuito:

$$\mathcal{R} = \sum_I \frac{l_i}{S_i \mu_i} = \sum \mathcal{R}_i \quad (2.19)$$

Indica di fatto **quanto il materiale si oppone al flusso magnetico** generato dalla induttanza, a differenza della permeabilità magnetica che indica quanto il materiale tende a magnetizzarsi.

Così facendo si possono estendere tutti i concetti e metodi risolutivi già affrontati ai circuiti magnetici.

## 2.4 Induttore

È il componente effettivamente utilizzato nei circuiti elettronici.



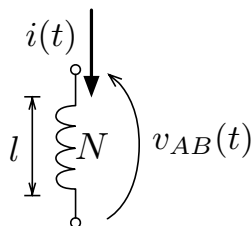


Figura 12: Induttore

Il flusso è proporzionale alla corrente e all'induttanza definita come segue:

$$\phi_C = N\varphi = NBS = N\mu HS = NS\mu \frac{NI}{l} = LI \quad (2.20)$$

Per avere risultati esatti bisogna fare in modo di mantenere una certa linearità, quindi non bisogna andare troppo avanti nella curva di isteresi del materiale ma si devono mantenere i componenti in punti dove la pendenza della curva si può pensare come costante.

## 2.5 Transitorio di carica della induttanza

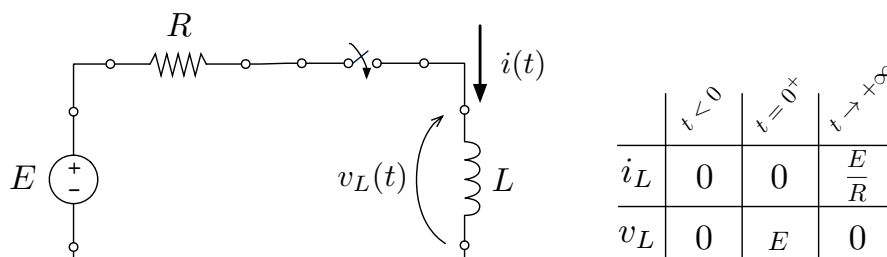


Figura 13: Transitorio di una induttanza

Una induttanza sottoposta a corrente continua si comporta come un conduttore, tranne per un primo momento di carica. Con  $t < 0$  si indica lo stato della tensione e della corrente prima della chiusura dell'interruttore, con  $t = 0^+$  il momento appena dopo la chiusura.

Appena viene chiuso il circuito, la corrente sulla induttanza non può variare istantaneamente, dato che deve generare il suo campo magnetico. In questo momento

quindi si comporterà come un generatore di corrente che tenderà a tenere la stessa a 0A. Si avrà quindi una corrente che genera una caduta di tensione:

$$v_L(0^+) = E - Ri(0^+) = E \quad (2.21)$$

Man mano che il tempo avanza si ha una situazione descrivibile con una equazione differenziale:

$$E - Ri(t) - v_L(t) = 0 \quad (2.22)$$

$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.23)$$

L'integrale particolare risulta  $\frac{E}{R}$  e la corrente rispetto al tempo varia:

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (2.24)$$

La crescita della corrente è quindi asintotica, e come con il condensatore si può considerare il transitorio come completato al punto  $5\tau$ , dove  $\tau = \frac{L}{R}$ .

Ovviamente questo vale per una sola induttanza per volta, non nel caso in cui ce ne siano diverse.

### Esempio 2.1.

Si ha un circuito RLC come in figura 14 e bisogna determinare la corrente  $i(t)$ .

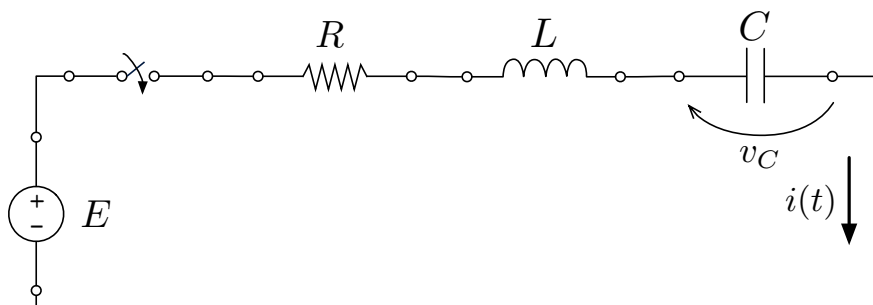


Figura 14: Circuito RLC

Studiando la maglia si nota che la corrente è 0 sia per  $t = 0^-$  che per  $t = 0^+$  e  $t \rightarrow +\infty$ . Questo succede perché è presente il condensatore, quindi ci si può aspettare un transitorio impulsivo che inizia e finisce con 0.

La tensione  $v_L$  invece è uguale  $V_{C0}$  (la tensione residua iniziale all'interno del condensatore) per  $t = 0^-$  e per  $t = 0^+$ , mentre diventa uguale a  $E$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

La induttanza, in altre parole, tende a dare una "inerzia" al circuito, opponendosi ai cambiamenti.

Applicando la seconda legge di K. alla maglia si ottiene la equazione:

$$E = L \frac{di}{dt} + R_i + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Per rimuovere l'integrale si può derivare membro a membro, ottenendo una equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti di secondo grado:

$$0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t)$$

La equazione caratteristica si ottiene:

$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{k_r}$$

Si distinguono quindi tre casi:

- $k_r > 0$ ,  $\alpha_{1,2}$  R.D.,  $i(t) = k_1 e^{[-\alpha_n + \sqrt{k_r}]t} + k_2 e^{[-\alpha_n - \sqrt{k_r}]t}$
- $k_r = 0$ ,  $\alpha_{1,2}$  R.C., si trovano  $k_1, k_2$  con condizioni iniziali
- $k_r < 0$ ,  $\alpha_{1,2}$  C.C.,  $t = 0, E = L \frac{di(0)}{dt} + V_{C0} \rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{E - V_{C0}}{L}, i(0) = k_1 \cdot e^0 + k_2 \cdot e^0 = k_1 + k_2 = 0$

**R.D. (reali distinte):**

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ C - \alpha_r + \sqrt{k_r} + [-\alpha_r - \sqrt{k_r}]k_2 = \frac{E - V_{C0}}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2L} (E - V_{C0}) \frac{1}{\sqrt{k_r}} \\ k_2 = -\frac{1}{2L} (E - V_{C0}) \frac{1}{\sqrt{k_r}} \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_r}} [e^{(-\alpha_r + \sqrt{k_r})t} - e^{(-\alpha_r - \sqrt{k_r})t}]$$

**R.C. (reali coincidenti):**

$$i(t) = (k_1 + k_2)te^{-\alpha_r t}$$

$$\begin{cases} i(0) = k_1 = 0 \\ \frac{di(0)}{dt} = -\alpha_r(k_1 + k_2) = \frac{E-V_{C0}}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{E-V_{C0}}{L} \end{cases}$$

**C.C. (complesse coniugate):**

$$i(t) = ke^{-\alpha_r t} \sin(\sqrt{-k_r}t + \gamma)$$

$$\begin{cases} i(0) = 0 = k \sin \gamma \\ \frac{di(0)}{dt} = \frac{E-V_{C0}}{L} = -\frac{R}{2L}k \sin \gamma + k\sqrt{-k_r} \cos \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ k = \frac{E-V_{C0}}{L\sqrt{-k_r}} \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L\sqrt{-k_r}} e^{-\alpha_r t} \sin(\sqrt{-k_r}t)$$

$$i(t) = -\frac{E - V_{C0}}{L\sqrt{-k}} e^{-\alpha_r t} \sin(\sqrt{-k_r}t + 180^\circ)$$

## 2.6 Induttanze in serie

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \quad (2.25)$$

$$v_L = v_{L1} + v_{L2} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} \quad (2.26)$$

## 2.7 Induttanze in parallelo

Sono sottoposte alla stessa tensione, ma sviluppano due correnti diverse.

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (2.27)$$

## 2.8 Scarica di una induttanza

Si procede ad aprire un circuito con una induttanza a regime e ci si chiede come procederà la corrente.

La condizione iniziale è quindi data da:

$$i(0) = \frac{E}{R} \quad (2.28)$$

$$i(0^+) = i(0^-) \quad (2.29)$$

Che però risulta in conflitto con il fatto che in un circuito aperto non circola corrente! La induttanza tende a far rimanere la corrente costante, ma essa non può circolare se il circuito è aperto.

L'interruttore impiega un certo tempo per spegnersi, e se per ipotesi la corrente fosse discontinua la induttanza (facendo la derivata) produce un delta di Dirac, che ha potenza infinita. In realtà produce una tensione molto elevata che crea una scarica (scintilla) all'interno dell'interruttore quando si apre, che provvede quindi a scaricare la energia residua.

Per ovviare al problema (ed evitare la progressiva distruzione dell'interruttore) si procede ad aggiungere un diodo in parallelo alla resistenza che scarica la corrente inversa prodotta.