

Doppi bipoli

Mc128k

Contenuti

Doppi bipoli, tipi di matrici associate, collegamento in serie, parallelo e cascata, mutua induzione, trasformatori ideali e reali

Indice

1	Doppi bipoli	3
1.1	Individuazione della matrice	3
1.2	Matrice ibrida	5
1.3	Matrice di trasmissione diretta	6
1.4	Sintesi di doppi bipoli	6
1.5	Collegamento di doppi bipoli	7
1.5.1	Serie	7
1.5.2	Parallelo	8
1.5.3	Cascata	9
2	Mutua induzione	9
2.1	Nessun accoppiamento	11
2.2	Accoppiamento perfetto	11
3	Trasformatore ideale	12
3.1	Simbolo bidimensionale	13
3.2	Utilizzi	14
3.2.1	Trasformazione dell'impedenza	14
3.2.2	Trasformatore di correnti e tensioni	14
3.2.3	Adattatore di impedenza	14
3.2.4	Isolatore	15
3.2.5	Misura di correnti o tensioni elevate	15
4	Trasformatore reale	16
4.1	Determinazione dei parametri	18

5 Autotrasformatore (variac)

19

1 Doppi bipoli

Un doppio bipolo (detto anche quadripolo) non è solo un componente che ha quattro connessioni per entrate e uscite, ma mostra anche un comportamento specifico rispetto ad esse.

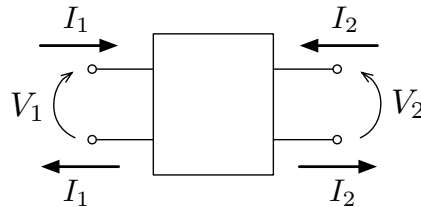


Figura 1: Doppio bipolo

In particolare la corrente in entrata nella prima porta deve sempre essere uguale a quella in uscita dalla seconda, stessa cosa per la terza e la quarta. Si hanno quindi dei **terminali collegati a coppie** individuati da quattro grandezze: I_1, I_2, V_1, V_2 . Le correnti solitamente sono in entrata dai morsetti positivi.

Nei problemi che includono un doppio bipolo, date 4 grandezze, se ne individuano due dipendenti e due indipendenti, a seconda del caso vengono impostate diverse equazioni in forma matriciale.

Si può quindi avere, per esempio, un legame tra le tensioni e le correnti dato dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

La matrice \bar{Z} avrà quindi come unità di misura la impedenza (che in corrente continua diventa una resistenza), se si volesse avere la matrice delle ammettenze:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

1.1 Individuazione della matrice

Esempio 1.1.

Prendendo come riferimento il circuito in fig.2, si vuole determinare la matrice delle impedenze e ammettenze.

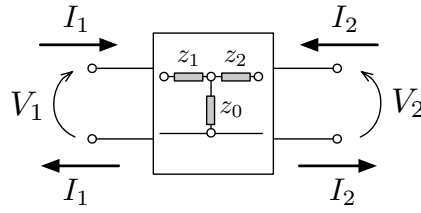


Figura 2: Circuito di riferimento

Usando il metodo delle correnti di maglia si ottiene una formula simile alla precedente, ma **non** si può procedere per ispezione dato che le correnti passanti per z_0 sono in verso contrario.

Per la prima legge di K.:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{z}_1 \bar{I}_1 + \bar{z}_0 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \\ \bar{V}_2 = \bar{z}_2 \bar{I}_2 + \bar{z}_0 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} V_1 = I_1(z_1 + z_0) + I_2 z_0 \\ V_2 = I_1 z_0 + I_2(z_2 + z_0) \end{cases} \quad (1.4)$$

La matrice delle impedenze $\|\bar{z}\|$ diventa quindi:

$$\|\bar{z}\| = \begin{bmatrix} z_1 + z_0 & z_0 \\ z_0 & z_2 + z_0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Si può notare che per avere la matrice delle ammettenze $\|\bar{y}\|$ basta trovare la inversa di quella delle impedenze. In alcuni casi una risulta più semplice da calcolare rispetto all'altra.

Per calcolare direttamente la matrice $\|\bar{y}\|$ si impongono, una per volta, le due tensioni a zero:

$$\begin{aligned} \bullet \bar{V}_2 = 0 &\rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = y_{11} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_2 = y_{21} \bar{V}_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_{11} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1} \\ y_{21} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1} \end{cases} \\ \bullet \bar{V}_1 = 0 &\rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = y_{12} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = y_{22} \bar{V}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_{12} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} \\ y_{22} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Procedendo poi al calcolo delle correnti:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad (1.6)$$

$$I_1 = \frac{V_1}{z_1 + z_0 \parallel z_2} \rightarrow y_{11} = \frac{1}{z_1 + z_0 \parallel z_2} \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

Si applica il partitore di corrente per trovare I_2 :

$$I_2 = -I_1 \frac{z_0}{z_0 + z_2} = \frac{-V_1}{z_1 + z_0 \parallel z_2} \cdot \frac{z_0}{z_0 + z_2} \rightarrow y_{21} = -\frac{z_0}{z_0 + z_2} \cdot \frac{1}{z_1 + z_0 \parallel z_2} \quad (1.9)$$

Stessa cosa per l'altro caso:

$$I_2 = \frac{V_2}{z_2 + z_1 \parallel z_0} \rightarrow y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{1}{z_2 + z_1 \parallel z_0} \quad (1.10)$$

È possibile anche trovare i coefficienti z ponendo il caso contrario, quindi annullando le correnti:

$$\begin{cases} V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

- $\bar{I}_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} z_{11} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \\ z_{21} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} \end{cases}$
- $\bar{I}_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} z_{12} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} \\ z_{22} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \end{cases}$

1.2 Matrice ibrida

La matrice $\|\bar{h}\|$ si ottiene considerando come variabili indipendenti una tensione e una corrente.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Dato che viene sempre rispettata la linearità, si procede nello stesso modo:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} [\Omega] \quad h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} \quad (1.14)$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} [\Omega^{-1}] \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{I_1=0} \quad (1.15)$$

Di solito viene utilizzata in corrente continua per costruire l'equivalente di un transistor (V_1 corrisponde alla base rispetto all'emettitore, V_2 al collettore), ma funziona anche in alternata.

1.3 Matrice di trasmissione diretta

Si usano come variabili calcolate la tensione e la corrente sulla porta 1. La corrente I_2 , a differenza della convenzione usata, si considera uscente dal bipolo.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \quad C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \quad (1.17)$$

$$B = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \quad D = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \quad (1.18)$$

1.4 Sintesi di doppi bipoli

In questo caso si conosce la matrice che rappresenta il circuito contenuto dal doppio bipolo e si vuole sintetizzare un diagramma con i componenti disposti in modo da comportarsi come descritto.

Nel caso in cui si dispone della matrice delle ammettenze si crea un circuito come in fig.3. In questo modo si mettono in relazione le due parti di circuito senza complicare troppo lo schema (nota, il primo generatore è sensibile alla seconda tensione e viceversa).

Una matrice ibrida come la 1.2 si può sintetizzare come in fig.4.

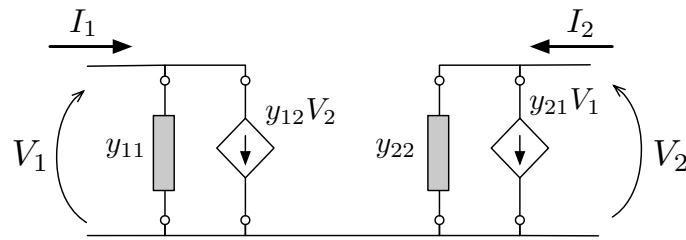
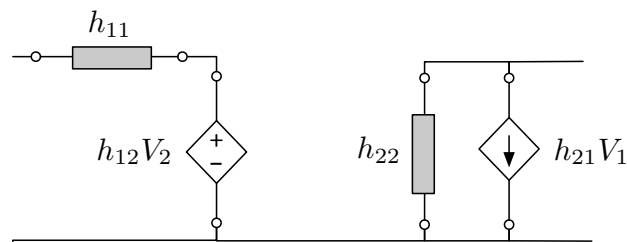


Figura 3: Sintesi di doppio bipolo

Figura 4: Sintesi di doppio bipolo (matrice h)

1.5 Collegamento di doppi bipoli

1.5.1 Serie

Si collegano le uscite del primo doppio bipolo alle entrate del secondo, come da fig.5.

$$\begin{cases} I'_1 = I''_1 = I_1, & I'_2 = I''_2 = I_2 \\ V_2 = V'_2 + V''_2, & V_1 = V'_1 + V''_1 \end{cases} \quad (1.19)$$

Se si considerano le matrici delle impedenze vale la somma delle due:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_{11} + z''_{11} & z'_{12} + z''_{12} \\ z'_{21} + z''_{21} & z'_{22} + z''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

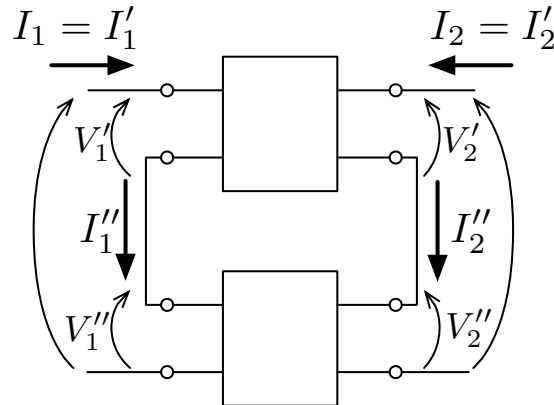


Figura 5: Doppi bipoli in serie

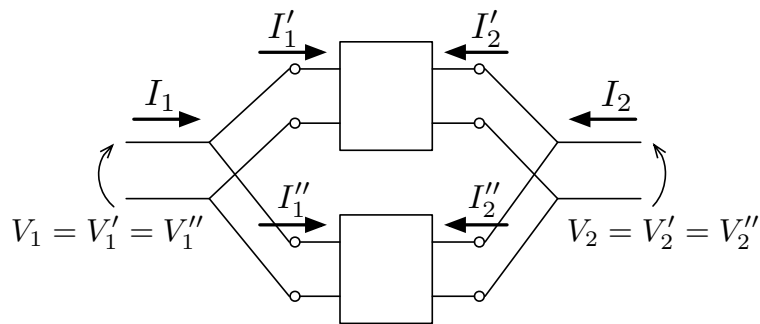


Figura 6: Doppi bipoli in parallelo

1.5.2 Parallelo

$$V_1 = V_1' = V_1'', \quad V_2 = V_2' = V_2'' \quad (1.21)$$

$$I_1 = I_1' + I_1'', \quad I_2 = I_2' + I_2'' \quad (1.22)$$

Il caso è duale al precedente, si sommano quindi le matrici delle ammettenze:

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\| \quad (1.23)$$

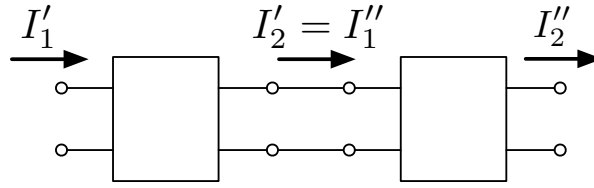


Figura 7: Doppia bipoli in cascata

1.5.3 Cascata

Si usa la matrice di trasmissione diretta (da qui le porte tutte uscenti per convenzione).

$$V'_1 = V_1, \quad V''_2 = V_2, \quad V'_2 = V''_1 \quad (1.24)$$

$$I'_1 = I_1, \quad I''_2 = I_2, \quad I'_2 = I''_1 \quad (1.25)$$

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\begin{bmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V''_1 \\ I''_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V''_2 \\ I''_2 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Si ottiene il risultato moltiplicando le matrici:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

2 Mutua induzione

Quando una induttanza viene percorsa da corrente, essa genera un campo magnetico che si concentra con l'aumentare del numero di spire, generando un flusso magnetico concatenato.

Se si avvicina un secondo avvolgimento, si fa in modo che il campo magnetico venga ricevuto e trasformato nuovamente in una corrente. Ricordando la legge di Hopkinson, si ha un legame fra il numero di spire N , la corrente i , la riluttanza magnetica \mathcal{R} e il flusso magnetico ϕ :

$$N \cdot i = \mathcal{R} \cdot \phi \quad (2.1)$$

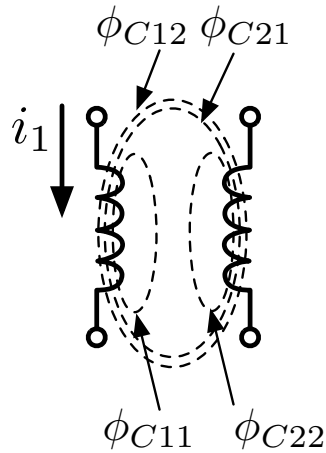


Figura 8: Mutua induzione

Per ottenere il flusso concatenato totale:

$$\phi_C = N \cdot \phi = \frac{N^2 i}{\mathcal{R}} := L \cdot i \quad (2.2)$$

Lo stesso si divide in vari flussi, a seconda se sono concatenati anche alla seconda induttanza oppure no (possono generarsi delle linee di forza che passano per il primo ma non per il secondo), il primo numero al pedice indica quale filamento ha subito il campo e il secondo quale lo ha generato:

$$\phi_{C1} = \phi_{C11} + \phi_{C12} \quad (2.3)$$

$$\phi_{C2} = \phi_{C21} + \phi_{C22} \quad (2.4)$$

La stessa relazione si può vedere diversamente inserendo un coefficiente di mutua

induzione μ e la induttanza L :

$$\phi_{C11} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_1} \cdot N_1 = L_1 i_1 \quad (2.5)$$

$$\phi_{C12} = \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_{12}} \cdot N_1 = \mu_{12} i_2 \quad (2.6)$$

$$\phi_{C21} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_{21}} \cdot N_2 = \mu_{21} i_1 \phi_{C1} = L_1 \cdot i_1 + \mu_{12} \cdot i_2 \quad (2.7)$$

$$\phi_{C2} = L_2 \cdot i_2 + \mu_{21} \cdot i_1 \quad (2.8)$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1}, \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_2} \quad (2.9)$$

$$\mu_{12} = \frac{N_2 N_1}{\mathcal{R}_{12}}, \quad \mu_{21} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{21}} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{21} \implies \mu_{12} = \mu_{21} := \mu \quad (2.11)$$

Il coefficiente μ può essere maggiore o minore di zero a seconda se i flussi si sommano in modo costruttivo o distruttivo.

2.1 Nessun accoppiamento

Se i due filamenti sono così distanti da non avere nessun flusso magnetico in comune, si hanno solo flussi dispersi:

$$\phi_{C12} = 0, \quad \phi_{C21} = 0 \quad (2.12)$$

$$\mu = 0 \quad (2.13)$$

2.2 Accoppiamento perfetto

$$\frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_1} = \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_2} = \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_{12}} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_{21}} = \frac{L_1 i_1}{N_1} = \frac{L_2 i_2}{N_2} = \frac{\mu_{12} i_2}{N_1} = \frac{\mu_{21} i_1}{N_2} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \frac{L_1}{N_1} = \frac{\mu_{21}}{N_2} \\ \frac{L_2}{N_2} = \frac{\mu_{12}}{N_1} \end{cases} \implies \frac{L_1}{\mu} = \frac{\mu}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} \implies \mu^2 = L_1 \cdot L_2 \quad (2.15)$$

$$|\mu| = \sqrt{L_1 L_2} \quad (2.16)$$

Si introduce quindi un fattore di accoppiamento k che varia da 0 (nessun accoppiamento) a 1 (accoppiamento perfetto):

$$k := \frac{|\mu|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (2.17)$$

3 Trasformatore ideale

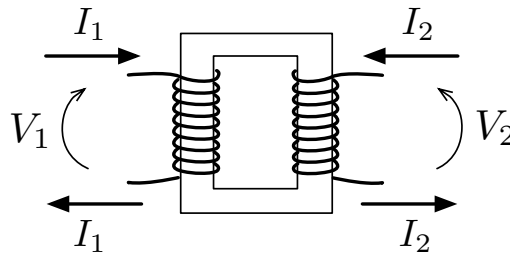


Figura 9: Trasformatore

Un trasformatore è un doppio bipolo che lavora in isolamento elettrico completo fra le due spire, quindi la corrente I_2 dipende solo dal flusso di campo magnetico creato da I_1 . Il nucleo è ferromagnetico, e permette un trasferimento più efficiente per fare in modo di considerare i flussi dispersi nulli.

La legge di Faraday-Lenz afferma che la tensione è legata alla derivata del flusso concatenato rispetto al tempo:

$$\begin{cases} v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{cases} \quad (3.1)$$

Si può quindi costruire un rapporto esprimibile con uno scalare che indica il funzionamento del componente:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad (3.2)$$

Si può utilizzare un trasformatore per elevare o abbassare la tensione in uscita dal doppio bipolo, ottenendo in condizioni ideali la stessa potenza, quindi se la tensione

in uscita viene alzata la corrente massima generata sarà più bassa e viceversa. Ciò che determina quanto verrà variata la tensione è solo il rapporto, non il numero di spire, che invece determina la induttanza complessiva del trasformatore, un fattore che va considerato in altri casi (trasformatori reali).

In queste condizioni si vuole avere:

- $k = 1$, fattore di accoppiamento perfetto
- $\mu \rightarrow +\infty$, permeabilità magnetica infinita del nucleo
- $\mathcal{R} \rightarrow 0$, riluttanza minima
- Nessuna perdita

Facendo queste ipotesi quindi:

$$\phi = B \cdot S \quad (3.3)$$

B e S sono finiti, $\mu \rightarrow +\infty$, $B = \mu H$, di conseguenza l'intensità di campo magnetico è infinitesima $H \rightarrow 0$. Quindi la forza elettromotrice complessiva deve risultare nulla, si ricava la condizione sulle correnti:

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \implies \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (3.4)$$

Un'altra cosa da notare è che se ci si avvicina alla saturazione magnetica del materiale si esce dalle condizioni di linearità, quindi gli effetti non vengono più descritti da queste formule.

Esso inoltre conserva la potenza, quindi di fatto viene interamente trasferita dal primo filamento al secondo. $P = v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$

3.1 Simbolo bidimensionale

Per indicare un trasformatore in un diagramma elettrico si usa il simbolo in fig.10, dove i puntini indicano la direzione dell'avvolgimento che altrimenti sarebbe ambigua.

Se in corrispondenza dei punti v_1 e v_2 hanno entrambe il morsetto positivo allora $v_2 = n v_1$ altrimenti si cambia segno.

Il contrario vale per la corrente, se due correnti sono entrambe entranti in corrispondenza dei punti allora una corrente è opposta all'altra, quindi $i_2 = -\frac{1}{n} i_1$.

Tensioni uguali, correnti opposte, il tutto deriva da come funziona la induzione magnetica.

3.2 Utilizzi

3.2.1 Trasformazione dell'impedenza

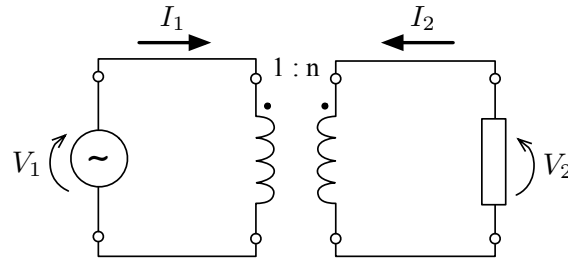


Figura 10: Circuito di riferimento

Si prenda il circuito in fig.10, si vuole sapere come la impedenza (resistenza) del componente viene trasformata dal trasformatore.

La resistenza equivalente in ingresso si ottiene:

$$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} \quad (3.5)$$

Costruendo le relazioni si ottiene:

$$v_1 = \frac{1}{n}v_2, \quad v_1 = \frac{1}{n}v - 2 = -\frac{1}{n}R_2i_2 = \frac{1}{n^2}R_2i_1 \quad (3.6)$$

$$i_2 = -\frac{1}{n}i_1, \quad v_2 = -R_2i_2 \quad (3.7)$$

$$R_{in} = \frac{R_L}{n^2} \quad (3.8)$$

3.2.2 Trasformatore di correnti e tensioni

Un trasformatore può essere usato come convertitore step-up o step-down per elevare o abbassare tensioni o correnti. Chiaramente se la tensione viene elevata la corrente erogata sarà minore e viceversa.

3.2.3 Adattatore di impedenza

Si capisce con un esempio; nei vecchi amplificatori a tubi termoionici (valvole) c'era bisogno di un trasformatore per adattare la impedenza da 8Ω dello speaker

all'uscita dell'amplificatore, rappresentabile come un generatore reale di tensione alternata, al fine di **massimizzare la potenza trasferita**.

Le due impedenze devono essere complesse coniugate perchè questo avvenga.

3.2.4 Isolatore

Un circuito collegato al secondo nucleo del trasformatore è elettricamente isolato dal primo, quindi se qualcuno accidentalmente lo tocca (fig.11) ci sono meno possibilità di rimanere fulminati, dato che non è possibile costruire un circuito chiuso per fare circolare la corrente. Questo non vale in tutti i casi o per tutte le tensioni o frequenze, ma viene comunque spesso utilizzato nei trasformatori switching per questioni di sicurezza.

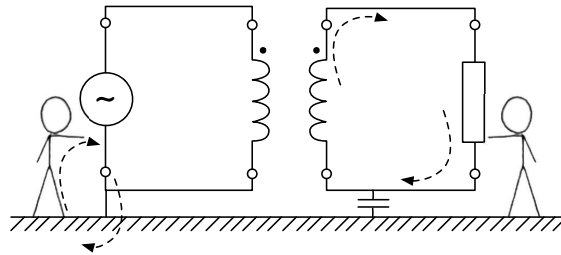


Figura 11: Protezione da folgoramento

Ciò che in realtà può succedere è che viene trasferita una quantità infinitesima di cariche per parificare le tensioni, ma non viene costruita una corrente. Caso diverso se la tensione ha una frequenza molto alta, alcune parti potrebbero avere una ridotta capacità parassita che permette la circolazione di corrente che chiuderebbe quindi il circuito (aumenta con la frequenza).

3.2.5 Misura di correnti o tensioni elevate

Essendo pericoloso misurare valori elevati in modo diretto, si può fare in modo di interporre un trasformatore fra il cavo misurato e lo strumento misuratore per abbassare i valori e poterli rilevare con più precisione.

Il rapporto fra il numero di spire relative al generatore e quelle dello strumento deve essere molto elevato:

$$\frac{N_1}{N_2} \gg 1 \quad (3.9)$$

4 Trasformatore reale

Per estendere le proprietà ad un trasformatore reale, effettivamente composto da fili attorno ad un nucleo ferromagnetico, si fanno cadere le ipotesi fatte all'inizio; di conseguenza si ha un accoppiamento magnetico non perfetto, una permeabilità magnetica finita e dispersioni date da effetto Joule.

Si rifanno quindi i conti con la legge di circuitazione di Ampère.

Il flusso concatenato disperso dipende da un parametro detto induttanza di dispersione:

$$\phi_{CD1} = Ld_1 i_1 \quad (4.1)$$

$$\phi_{CD2} = Ld_2 i_2 \quad (4.2)$$

Per la legge di circuitazione, dato che il mezzo è omogeneo e ha sezione costante:

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = H \cdot l = N_1 i_1 \quad (4.3)$$

$$B = \mu H = \frac{\mu}{l} N_1 \left(i_2 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right) \quad (4.4)$$

In un trasformatore ideale si ha che $\mu \rightarrow \infty$, di conseguenza $H \rightarrow 0$ per avere un valore di B finito; avendo un valore di μ finito cade la ipotesi, quindi non è più vero che tutte le correnti i_1 si trasformano in correnti i_2 .

Viene denominato **principale** il flusso che concatena 1 e 2:

$$\phi_{CP1} = \frac{\mu}{l} AN_1^2 (i_1 + ni_2) \quad (4.5)$$

$$\phi_{CP2} = n\phi_{CP1} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \phi_{C1} = Ld_1 i_1 + \phi_{CP2} = Ld_1 i_1 + L_m (i_1 + ni_2) \\ \phi_{C2} = \phi_{CP2} + Ld_2 i_2 = nL_m (i_1 + ni_2) + Ld_2 i_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$L_m := \frac{\mu}{l} AN_1^2 \quad (4.8)$$

Riordinando i termini e raccogliendo:

$$\begin{cases} \phi_{C1} = (Ld_1 + L_m)i_1 + nL_m i_2 = L_1 i_1 M i_2 \\ \phi_{C2} = nL_m i_1 + (Ld_2 + n^2 L_m)i_2 = \mu i_2 + L_2 i_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

Si ottiene quindi la relazione fra i due avvolgimenti, oltre alla **induttanza di magnetizzazione** che rappresenta lo stato iniziale di carica del trasformatore. Esso, quando passa da spento ad acceso ha bisogno di una certa energia in più per iniziare a produrre il campo magnetico, e viene rappresentata da una induttanza in parallelo all'avvolgimento principale.

$$\begin{cases} L_1 := Ld_1 + L_m \\ L_2 := Ld_2 + n^2 L_m \\ M := nL_m \end{cases} \quad (4.10)$$

Il **fattore di accoppiamento** è dato da:

$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{nL_m}{\sqrt{(Ld_1 + L_m)(Ld_2 + n^2 L_m)}} \quad (4.11)$$

Le tensioni V_1 e V_2 :

$$\bar{V}_1 = \frac{d\bar{\phi}_{C1}}{dt} = j\omega Ld_1 \bar{I}_1 + j\omega L_m (\bar{I}_1 + n\bar{I}_2) \quad (4.12)$$

$$\bar{V}_2 = \frac{d\bar{\phi}_{C2}}{dt} = j\omega Ld_2 \bar{I}_2 + n j\omega L_m (\bar{I}_1 + n\bar{I}_2) \quad (4.13)$$

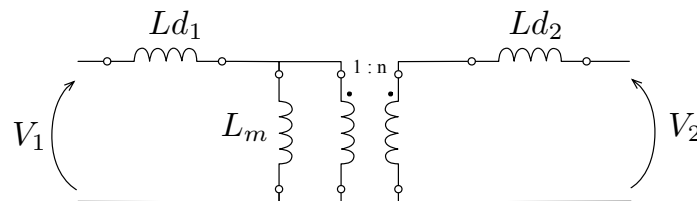


Figura 12: Modello di trasf. reale

Un modello approssimativo si può quindi costruire in fig.12, e aggiungendo il fatto che il filo pone una resistenza si ha fig.13.

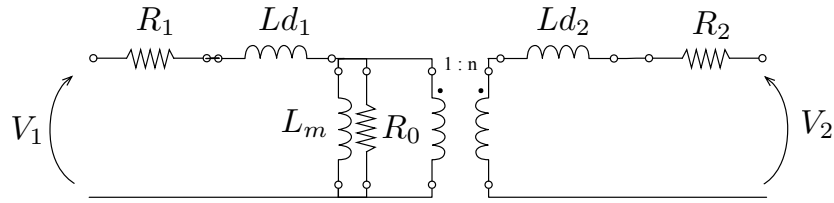


Figura 13: Modello di trasf. reale

4.1 Determinazione dei parametri

Si vogliono estrarre i parametri di un trasformatore fisico osservando come funziona. Il numero di spire è facilmente misurabile alimentando il primo avvolgimento e misurando la tensione in uscita.

Per gli altri si effettua una prova a vuoto, quindi alimentando il componente con una tensione V_1 nominale e lasciando aperto il secondo morsetto. In questo modo si possono misurare i parametri dell'avvolgimento primario; se è ben costruito dovrebbe risultare che $Ld_1 \ll L_m$.

È possibile ricavare R_0 e L_m dalla corrente:

$$I_1 \simeq \frac{\bar{V}_{1n}}{R_0 // j\omega L_m} \quad (4.14)$$

Mettendo ora in cortocircuito l'avvolgimento secondario (e facendo entrare una tensione molto bassa per non fare incendiare il tutto) si possono trascurare L_m e R_0 . Si pongono le correnti come $I_1 \simeq -nI_{2n}$, dove I_{2n} rappresenta la corrente nominale indicata sul componente.

Riportando al primario si ha un generatore collegato a R_1, L_1, L_{21}, R_{21} in cui passa la corrente I_1 :

$$I_1 = \frac{\bar{V}_{1r}}{R_1 + R_2 + j\omega(Ld1 + Ld21)} \quad (4.15)$$

Non potendo separare $R_1 + R_{21}$ e $Ld1 + Ld21$, si ottengono due a due. R_1 e R_2 sono direttamente misurabili con uno strumento a quattro morsetti, per L si fa a metà.

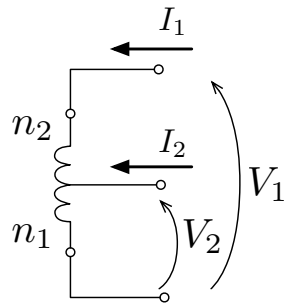


Figura 14: Trasf. variac

4.2 Autotrasformatore (variac)

Si tratta di un trasformatore composto da un solo filamento, quindi non galvanicamente isolato, con il numero di spire regolabile da un cursore. Il primario e il secondario quindi condividono lo stesso avvolgimento (fig.14).