

# Regime sinusoidale

Mc128k

2015-11-25

## Contenuti

Trasformata di Steinmetz, circuiti in regime sinusoidale, comportamento in frequenza, potenza, rifasamento, sistemi trifase, diagrammi di Bode

## Indice

<b>1</b>	<b>Regime sinusoidale</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Trasformata di Steinmetz</b>	<b>3</b>
2.1	Rappresentazione fasoriale . . . . .	5
2.2	Bipolo generico . . . . .	6
2.3	Definizioni . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Potenze in regime sinusoidale</b>	<b>7</b>
3.1	Confronto con regime continuo . . . . .	8
3.2	Potenza media assorbita . . . . .	8
3.3	Potenza complessa . . . . .	9
3.4	Unità di misura . . . . .	10
3.5	Teorema di Boucherot . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Rifasamento</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Teorema del massimo trasf. di potenza</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Sistemi trifase</b>	<b>15</b>
6.1	Potenza in trifase . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Comportamento in frequenza</b>	<b>19</b>
7.1	Diagrammi di Bode . . . . .	20

---

7.2	Filtri . . . . .	20
7.2.1	Filtro RC . . . . .	20
7.2.2	Filtro RL . . . . .	22
7.2.3	Filtro RLC . . . . .	23
7.2.4	Notch . . . . .	24
7.3	Fattore di qualità . . . . .	25
7.4	Funzione di trasferimento . . . . .	26
7.5	Concatenazione di filtri . . . . .	29
7.6	Decibel . . . . .	30
7.7	Filtro RLC . . . . .	32

## 1 Regime sinusoidale

I circuiti in regime sinusoidale sono caratterizzati da tensione e corrente che variano nel tempo secondo una sinusoide con una certa frequenza, ampiezza e fase.

Bisogna fare attenzione a non confondere il regime sinusoidale con la corrente alternata, esso è solo uno dei tanti modi di alternare la corrente.

Qualunque situazione di corrente alternata può essere studiata (grazie alla serie di Fourier) come sovrapposizione di sinusoidi; chiaramente il regime sinusoidale porta ad avere la massima semplificazione possibile, dato che è presente una sola onda nella serie.

L'andamento della tensione e della corrente è dato dalla sinusoide generica, dove  $X_{max}$  rappresenta il valore di picco,  $\gamma_x$  la fase iniziale e  $\omega = 2\pi f$ .

$$x(t) = X_{max} \cdot \cos(\omega t + \gamma_x) \quad (1.1)$$

La corrente domestica funziona con una frequenza di  $50\text{hz}$  in europa, quindi la velocità angolare è  $\omega = 314\text{rad/s}$ .

Quando in una maglia è presente un generatore di tensione sinusoidale, tutte le correnti e tensioni variano allo stesso modo, quindi tutte le altre grandezze sono identificate da ampiezza e fase.

## 2 Trasformata di Steinmetz

Per analizzare meglio i circuiti in regime sinusoidale si fa uso di un metodo di analisi che permette di semplificare il circuito in un modello risolvibile come se fosse in corrente continua, senza fare uso di equazioni trigonometriche.

$$x(t) = X_{max} \cos(\omega t + \gamma_x) \leftrightarrow \bar{X} = X_{max} e^{\gamma_x} \quad (2.1)$$

Dove  $\bar{X}$  rappresenta un vettore bidimensionale (numero complesso).

Per dimostrarlo si pone la seconda legge di Kirchhoff alla maglia composta da una resistenza, una induttanza ed un condensatore:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$E_{max} \cos(\omega t + \alpha) = RI_{max} \cos(\omega t + \beta) - LI_{max}\omega \sin(\omega t + \beta) + \frac{1}{\omega C} I_{max} \sin(\omega t + \beta) \quad (2.3)$$

Si pone per la legge di Eulero:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.4)$$

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \Re[Ae^{j(\omega t + \alpha)}] \quad (2.5)$$

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \Im[Ae^{j(\omega t + \alpha)}] \quad (2.6)$$

$$E_{max} \cos(\omega t + \alpha) = \Re[E_{max}e^{j(\omega t + \alpha)}] \quad (2.7)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[I_{max} \cos(\omega t + \beta)] = -I_{max}\omega \sin(\omega t + \beta) = \quad (2.8)$$

$$= -I_{max}\omega \Im[e^{j(\omega t + \beta)}] = \omega I_{max} \Re[je^{j(\omega t + \beta)}] \quad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t I_{max} \cos(\omega\tau + \beta) d\tau = \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\omega} I_{max} \Re\left[\frac{1}{j} e^{j(\omega t + \beta)}\right] = E_{max} \Re[e^{j(\omega t + \alpha)}] = \quad (2.11)$$

$$RI_{max} \Re[e^{j(\omega t + \beta)}] + LI_{max}\omega \Re[je^{j(\omega t + \beta)}] + \frac{1}{\omega C} I_{max} \Re\left[\frac{1}{j} e^{j(\omega t + \beta)}\right] \quad (2.12)$$

Si ottiene una combinazione lineare a coefficienti costanti di parti reali con esponenziali aventi lo stesso  $\omega$ . Deve quindi valere:

$$E_{max}e^{j\cdots} = \text{parte senza reale} \quad (2.13)$$

Tutti i termini hanno in comune  $e^{j(\omega t)}$  e si possono semplificare.

$$E_{max}e^{j\alpha} = [R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}] I_{max}e^{j\beta} \quad (2.14)$$

Ottenendo i fasori rappresentativi di  $e(t)$  e  $i(t)$ :

$$E_{max}e^{j\alpha} \leftrightarrow e(t) \quad (2.15)$$

$$I_{max}e^{j\beta} \leftrightarrow i(t) \quad (2.16)$$

Passando da una rappresentazione nel dominio del tempo ad una rappresentazione fasoriale. Ogni grandezza è quindi rappresentabile da un numero complesso, quindi un vettore nel piano.

I componenti passivi non subiscono trasformazione (vedi la resistenza  $R$ ) mentre quelli attivi vengono indicati come segue, rispettivamente per induttanze  $L$  e condensatori  $C$ :

$$\bar{E} = [R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}] \bar{I} \quad (2.17)$$

Induttanze e condensatori sono usati come "resistenze immaginarie" nella equazione. Questo permette di risolvere un circuito in corrente alternata esattamente come se fosse in regime continuo, trasformando i componenti in modo appropriato, come in fig.1.

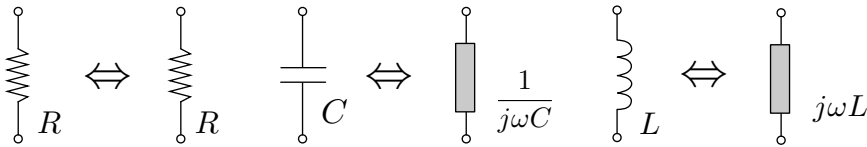


Figura 1: Componenti equivalenti

Il metodo risolutivo quindi comporterà la trasformazione del circuito e di tutte le grandezze, per poi poterlo risolvere e tornare nel dominio del tempo con la antitrasformata.

$$x(t) = X_{max} \cos(\omega t + \gamma x) \leftrightarrow \bar{X} = X_{max} e^{j\gamma x} \quad (2.18)$$

La resistenza complessa che rappresenta i componenti reattivi prende il nome di **impedenza**, ed essa dipende dalla frequenza in entrata.

## 2.1 Rappresentazione fasoriale

La rappresentazione fasoriale permette di indicare i componenti del segnale come vettori in un piano. Se due vettori rappresentano rispettivamente tensione e corrente, questi hanno il modulo che non è paragonabile, ma la fase corrisponde, quindi per esempio la tensione ai capi di una resistenza e la corrente che ci passa hanno la stessa fase, dato che essa è un componente passivo.

In una maglia con diversi componenti reattivi si produce una corrente con uno sfasamento rispetto alla tensione; a regime essa può essere anticipata o ritardata. La tensione su una induttanza è a  $90^\circ$  in anticipo rispetto alla corrente, dato che uno è la derivata dell'altro (seno-coseno), mentre quella su un condensatore è in ritardo di  $90^\circ$ .

Ovviamente nel grafico tutte le tensioni sommate fanno zero per la legge di Kirchhoff alla maglia.

$$\bar{E} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \quad (2.19)$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \cdot \bar{I} \quad (2.20)$$

$$\bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot I = -j\frac{1}{\omega C} \bar{I} \quad (2.21)$$

## 2.2 Bipolo generico

Un componente (o un circuito formato da componenti reattivi) può essere rappresentato da un dipolo generico con la trasformata. Rispetto alla tensione ai capi, la corrente può essere in anticipo (fig.2) o in ritardo di un certo angolo  $\varphi$ .

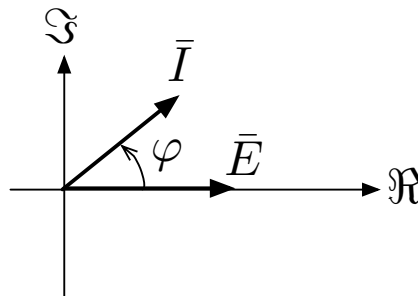


Figura 2: Vettori rappresentativi

$$v(t) = V_{max} \cdot \cos(\omega t) \quad (2.22)$$

$$i(t) = I_{max} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.23)$$

Se l'angolo  $\varphi > 0$  (corrente in anticipo rispetto alla fase) si dice che il componente è **ohmico-induttivo**, mentre se  $\varphi < 0$  è **ohmico-capacitivo**.

## 2.3 Definizioni

**Definizione 2.1** (Impedenza). Un numero complesso, si indica con  $\bar{E} = R + jX$ , se è reale il componente è una resistenza, se è immaginario puro è una induttanza

o un condensatore. Indica quanto il componente si oppone al passaggio di corrente alternata.

**Definizione 2.2** (Reattanza). Numero reale, la parte immaginaria della impedenza. Si indica con  $X = \Im[\bar{z}]$ . Dipende dai componenti reattivi.

**Definizione 2.3** (Resistenza). La parte reale della impedenza, misurata in Ohm complessi.

**Definizione 2.4** (Ammettenza). L'inverso della impedenza.  $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{z}}$

**Definizione 2.5** (Conduttanza).  $G = \Re[\bar{Y}]$

**Definizione 2.6** (Susceptanza).  $B = \Im[\bar{Y}]$

Da notare che:

$$G \neq \frac{1}{R} \quad (2.24)$$

### 3 Potenze in regime sin.

La potenza istantanea in  $t$  è data da:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (3.1)$$

Si possono distinguere due tipi di potenze da quella istantanea, quella **attiva** e quella **fluttuante**:

$$p(t) = V_{max} \cdot I_{max} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos \varphi + \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos(2\omega t - \varphi) \quad (3.3)$$

La potenza attiva è il valore medio della potenza istantanea. Avere una potenza negativa (grafico che va sotto lo zero) indica che il bipolo si sta comportando come generatore, quindi i componenti reattivi cedono potenza.

Esiste anche un altro metodo per distinguere le potenze in corrente alternata, la potenza istantanea si può dividere in potenza **attiva** e **reattiva**.

La corrente attiva, quindi la parte di corrente in fase con la tensione è data da:

$$I_{max} \cos(\omega t) \cos \varphi \quad (3.4)$$

Mentre la corrente reattiva, in fase a  $90^\circ$  rispetto alla corrente attiva, è:

$$I_{max} \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (3.5)$$

Si ottengono quindi potenza attiva e potenza reattiva, la prima contiene il coseno perché si tratta della parte in fase, la seconda invece è sfasata di  $90^\circ$  rispetto alla corrente:

$$P_A(t) = \frac{1}{2} [V_{max} I_{max} + V_{max} I_{max} \cos(2\omega t)] \cos \varphi \quad (3.6)$$

$$P_R(t) = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \sin(2\omega t) \sin \varphi \quad (3.7)$$

La potenza reattiva transita in continuazione fra generatore ed utilizzatore, ma dato che i cavi hanno una resistenza interna, questa potenza viene in parte dissipata per effetto Joule. Per questo motivo i fornitori di energia elettrica impongono un limite nel valore di  $\varphi$  che può essere raggiunto.

Ricapitolando, la potenza può essere vista in due modi, con la potenza fluttuante o la somma di potenza attiva e reattiva:

$$P(t) = P + P_F(t) \quad (3.8)$$

$$P(t) = P_A(t) + P_R(t) \quad (3.9)$$

### 3.1 Confronto con regime continuo

Effettuando un confronto energetico della potenza con quella misurata in regime continuo si ha che:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (3.10)$$

Mentre per la corrente alternata, ipotizzando che il carico sia resistivo, quindi  $\bar{z} = R$ :

$$p(t) = v(t)i(t) = V_{max} I_{max} \cos^2(\omega t) = P_A(t) \quad (3.11)$$

### 3.2 Potenza media assorbita

La potenza media che viene assorbita e dissipata si ottiene con la media integrale:

$$P_M = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t)dt = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt \quad (3.12)$$



Data una forma d'onda qualsiasi con cui si sta alimentando una resistenza, ci si chiede qual è il valore di corrente continua che bisognerebbe dare per dissipare in media la stessa energia. Rispettivamente, per corrente continua e alternata si ha:

$$P_M = RI^2 \quad (3.13)$$

$$P_M = R \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \quad (3.14)$$

Euguagliando le due parti, si ottiene la **corrente efficace RMS**, che quindi genererebbe gli **stessi effetti termici in regime continuo**.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (3.15)$$

RMS sta per "Root Mean Square", radice della media del quadrato. Una volta ottenuto il valore RMS della corrente la potenza si calcola in modo classico.

In particolare, se si prende in considerazione il regime sinusoidale, la corrente e la tensione efficaci si possono calcolare semplicemente:

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \quad (3.16)$$

$$V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \quad (3.17)$$

$$P = \frac{V_{max} I_{max}}{2} \cos \varphi = V \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (3.18)$$

### 3.3 Potenza complessa

La potenza complessa è rappresentata da un numero immaginario che contiene potenza attiva e reattiva in un solo oggetto.

$$\bar{A} = P + jQ = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi \quad (3.19)$$

$$|\bar{A}| = VI := A \quad (3.20)$$

La potenza denotata con  $|\bar{A}|$  è detta **potenza apparente**, ed è data dal modulo del vettore sul piano di Gauss. È detta anche "di dimensionamento", dato che è quella considerata quando si dimensiona la potenza che deve portare un circuito.

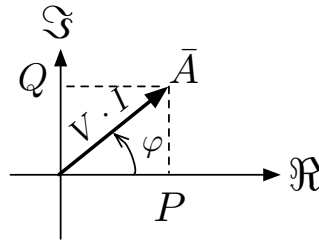


Figura 3: Potenza complessa

Inoltre essa può essere data dal **prodotto del fasore della tensione e il complesso coniugato del fasore della corrente**:

$$\bar{A} = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi \quad (3.21)$$

$$= VI(\cos \varphi + j \sin \varphi) = VIe^{j\varphi} \quad (3.22)$$

$$= \bar{V} \cdot \bar{I}^* \quad (3.23)$$

### 3.4 Unità di misura

Le unità di misura delle potenze cambiano a seconda dell'uso.

La potenza apparente si misura in Volt-Ampère:

$$A[\text{VA}] \quad (3.24)$$

Per potenza attiva e reattiva si usano rispettivamente Watt e Volt-Ampère Reattivi:

$$P[\text{W}] \quad (3.25)$$

$$Q[\text{VAR}] \quad (3.26)$$

### 3.5 Teorema di Boucherot

La somma delle potenze attive generate da un generatore in regime sinusoidale è uguale alla somma delle potenze attive utilizzate. Stessa cosa per quelle

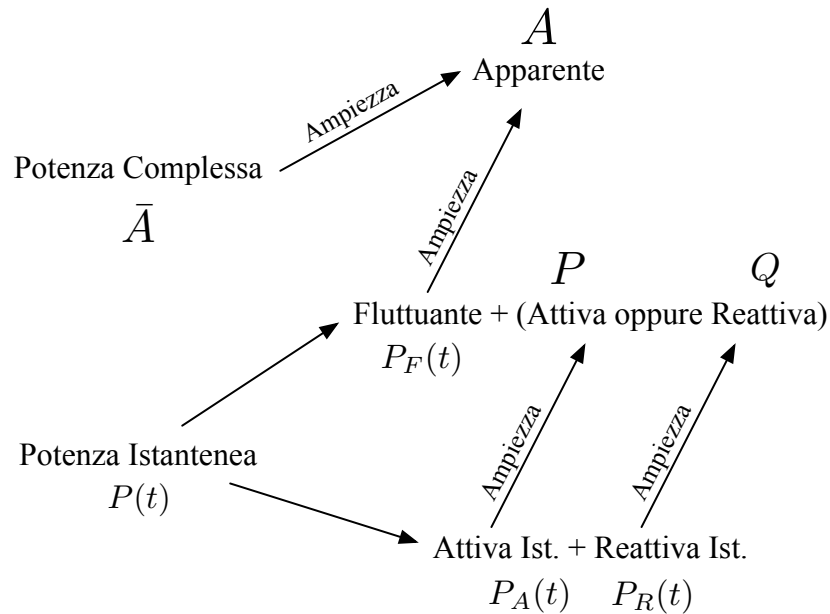


Figura 4: Riepilogo delle potenze

reattive.

$$\sum P_u = \sum P_U \quad (3.27)$$

$$\sum Q_u = \sum Q_U \quad (3.28)$$

Di conseguenza vale anche per le potenze complesse:

$$\sum \bar{A}_u = \sum \bar{A}_U \quad (3.29)$$

### 3.6 Rifasamento

Un fornitore di energia elettrica, per non dovere sovradimensionare i cavi e perdere energia per nulla, cerca di limitare la potenza reattiva usata dai clienti. Ridurre il valore di  $\varphi$  vuol dire ridurre il carico che viene continuamente trasferito fra generatore ed utilizzatore, che in casi reali porta ad avere una maggiore energia dissipata per effetto Joule.

Solitamente gli impianti industriali (a causa principalmente dei motori elettrici) causano un uso di potenza reattiva di tipo induttivo  $\varphi > 0$ , che andrà quindi

compensata con dei condensatori per portare il valore  $\cos \varphi$  sopra 0.9, come definito per legge.

I condensatori fanno in modo di accumulare la potenza reattiva che andrebbe altrimenti a passare per i cavi del fornitore, trasformando il carico in uno quasi puramente resistivo. La fase della corrente viene spostata per essere più vicina possibile a quella della tensione.

Ovviamente lo stesso varrebbe anche per il caso contrario, se si ha un carico capacitivo si compensa con delle induttanze, ma questo non succede mai nella realtà.

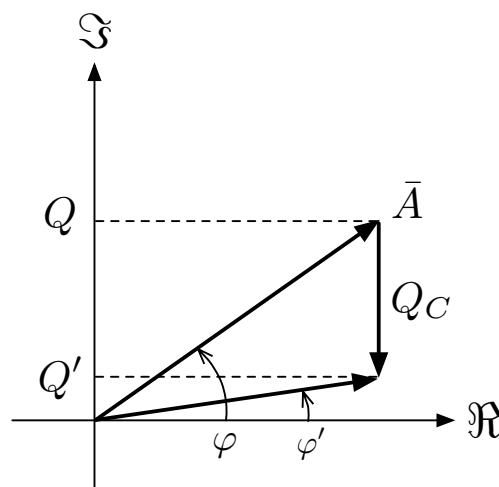


Figura 5: Rifasamento con condensatore

$$Q' = Q + Q_C \quad (3.30)$$

$$Q = VI \sin \varphi = VI \sin \varphi \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi} = P \tan \varphi \quad (3.31)$$

$$Q' = P \tan \varphi' \quad (3.32)$$

$$Q_C = Q' - Q = P(\tan \varphi' - \tan \varphi) \quad (3.33)$$

Si utilizza la impedenza del condensatore  $X_C$  per formulare la potenza, e poi si pone in relazione a  $V$ :

$$|Q_C| = X_C I_C^2 = \frac{V^2}{X_C} \quad (3.34)$$

Ricordando che  $X_C = \frac{1}{j\omega C}$  si può prendere il valore assoluto rimuovendo  $j$ :

$$X_C = \frac{V^2}{|Q_C|} = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{reattanza capacitiva}) \quad (3.35)$$

$$C = \frac{|Q_C|}{\omega V^2} = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2} \quad (3.36)$$

### 3.7 Massimo trasf. di potenza

Quando si effettua un trasferimento di energia si possono avere due obiettivi:

- Massimizzare la efficienza, quindi perdere meno energia possibile
- Massimizzare la quota di energia che arriva a destinazione, fregandosene della efficienza

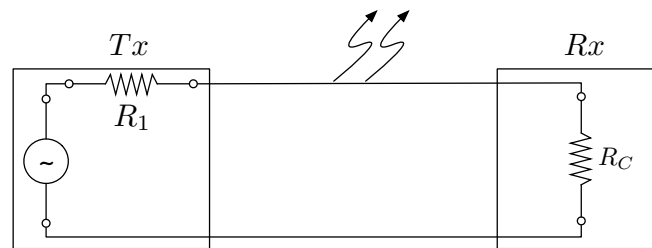


Figura 6: Trasferimento di energia

Se per esempio si vuole trasmettere una informazione si deve fare in modo di ricadere nel secondo caso, dato che si vuole massimizzare la quantità di energia a destinazione.

Tenere presente che la efficienza è data dal rapporto della potenza utilizzabile e la potenza totale:

$$\eta = \frac{P_U}{P_T} \quad (3.37)$$

Per modellizzare il secondo caso si inizia considerando i componenti come  $\bar{V}_g$  per il generatore,  $\bar{z}_g$  la resistenza del generatore e  $\bar{z}_c$  quella dell'utilizzatore (carico). Entrambi vengono visti come impedenze.

$$\bar{z}_g = R_g + jX_g \quad \bar{z}_c = R_c + jX_c \quad (3.38)$$

La corrente alternata varia per trasmettere delle informazioni. Per semplificare i calcoli si ipotizza che la tensione non abbia fase, quindi il generatore all'istante zero è reale:

$$\bar{V}_g(0) = V_g(0) \quad (3.39)$$

La corrente di conseguenza si ottiene con la corrente reale moltiplicata per il fasore:

$$\bar{I}_g = I_g \cdot e^{j\varphi_i} \quad (3.40)$$

Si calcola quindi la potenza complessa:

$$\bar{A}_g = V_g \cdot \bar{I}_g^* = V_g \cdot I_g \cdot e^{-j\varphi_i} = P_g + jQ_g \quad (3.41)$$

Dopo il transitorio iniziale si trascura la potenza reattiva, ottenendo quindi la potenza del generatore, che si vuole massimizzare:

$$P_g = \Re \bar{A}_g = V_g I_g \cos \varphi_i \quad (3.42)$$

La potenza persa sul generatore e la potenza ricevuta si calcolano rispettivamente:

$$P_{Rg} = R_g I_g^2 \quad (3.43)$$

$$P_{Rc} = R_c I_g^2 \quad (3.44)$$

Si sa che la potenza generata deve essere uguale a quella persa:

$$P_g = P_{Rg} + P_{Rc} \quad (3.45)$$

Quindi si può calcolare esplicitamente la potenza ricevuta:

$$P_{Rc} = R_c I_g^2 = P_g - P_{Rg} = V_g I_g \cos \varphi_i - R_g I_g^2 = f(I_g, \varphi_i) \quad (3.46)$$

Questa potenza si può ottimizzare modificando le variabili da cui dipende, quindi se si imposta  $\cos \varphi = 1$  si ottengono tensione e corrente in fase, quindi le reattanze uguali e contrarie si annullano:

$$\bar{I}_g = \frac{V_g}{\bar{z}_y + \bar{z}_c} = \frac{V_g}{R_g + jX_g + R_c + jX_c} = \frac{V_g}{R_g + R_c} \quad (3.47)$$

Si riprende dalla formula ?? la potenza della resistenza ricevente:

$$P_{Rc} = V_g I_g - R_g I_g^2 \quad (3.48)$$

Bisogna cercare un punto di massimo di  $I_g$ , si esegue cercando i punti in cui si annulla la derivata:

$$\frac{dP_{Rc}}{dI_g} = V_g - 2R_g I_g = 0 \implies I_g = \frac{V_g}{R_g + R_c} \implies R_c = R_g \quad (3.49)$$

Quindi si ottiene che l'unico modo di avere la massima potenza a destinazione è dividendo le perdite al 50%. Questo significa che per trasmettere più energia possibile bisogna perderne metà dal trasmettitore.

Le impedenze risultano uguali ma complesse coniugate:

$$\begin{cases} x_c = x_g \\ R_c = R_g \end{cases} \implies \bar{z}_c = \bar{z}_g^* \quad (3.50)$$

## 4 Sistemi trifase

Un sistema trifase è un modo di trasmettere energia elettrica attraverso tre flussi di corrente alternata sfasati tra di loro.

La frequenza di ogni tensione è uguale, ma le tre generate sono sfasate di  $120^\circ$ .

$$e_1(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t) \quad (4.1)$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (4.2)$$

$$e_3(t) = \sqrt{2}E \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (4.3)$$

La tensione massima in ogni momento è data da  $\sqrt{2}E$ , e si nota che la somma di tutte le fasi è uguale a zero:

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \quad (4.4)$$

Un generatore trifase si può creare collegando a stella tre generatori di corrente alternata sfasati tra di loro, come in fig.8. Facendo in questo modo la energia si può trasportare attraverso solo tre cavi invece che sei. La tensione in uscita si ha con la differenza tra i due cavi considerati:

$$\bar{V}_{1,2} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \quad (4.5)$$

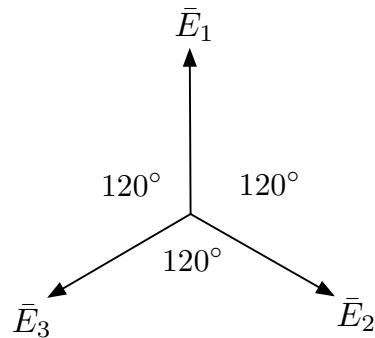


Figura 7: Tensioni in regime trifase

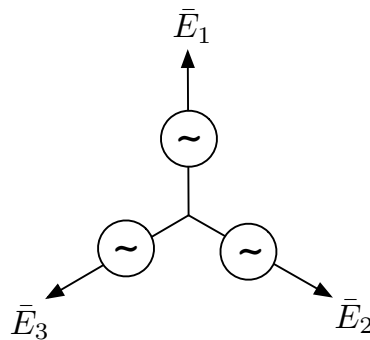


Figura 8: Generatori in regime trifase

Le tensioni uscenti dai singoli generatori vengono dette **tensioni di fase**, mentre quelle misurate tra due cavi sono **tensioni di linea**.

Negli impianti reali si collega il centro stella alla terra in modo da avere un potenziale di riferimento uguale per ogni utilizzatore, oltre ad aumentare la sicurezza.

Idealmente il consumo di corrente sui tre cavi di una linea trifase dovrebbe essere uguale, ma dato che le utenze ne usano solo una questo non succede; ciò fa in modo di "muovere" il centro stella (la tensione nulla di riferimento) dato che la tensione viene abbassata in modo non uniforme. Normalmente vengono assegnate le fasi agli utilizzatori in modo casuale per bilanciare i carichi.

I nomi convenzionali dei generatori e utilizzatori sono indicati in fig.10.



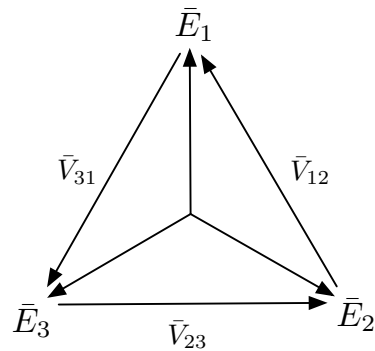


Figura 9: Tensioni misurate come vettori

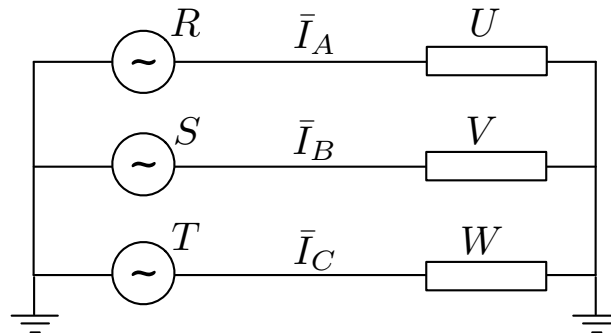


Figura 10: Convenzione di nomenclatura

Per risolvere il problema della divisione dei carichi e tenere "fermo" il centro stella si può ricorrere ad un tipo di collegamento alternativo, come in fig.11. In questo modo ogni tensione presente negli utilizzatori corrisponde con la corrispondente tensione al generatore.

## 4.1 Potenza in trifase

Per misurare la potenza in regime trifase si può procedere in diversi modi. Il primo prevede l'uso di tre wattmetri collegati a terra che misurano la potenza utilizzata da ogni singola fase (fig.12).

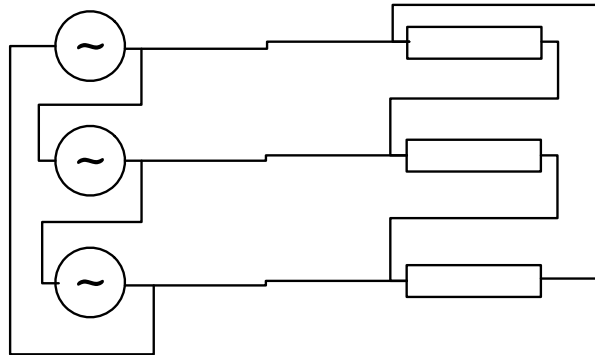


Figura 11: Connessione alternativa

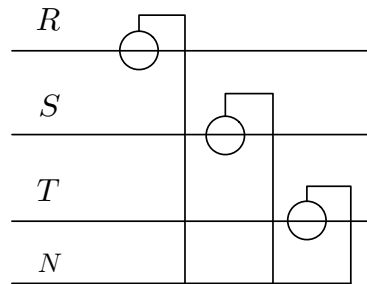


Figura 12: Misurazione della potenza

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (4.6)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (4.7)$$

Questa configurazione purtroppo non è di facile utilizzo, dato che il trasporto di linee trifase non include il neutro (centro stella). Per effettuare la misurazione in assenza del quarto cavo si fa uso di un metodo alternativo rappresentato in fig.13.

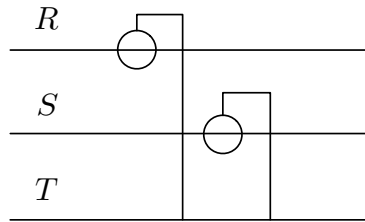


Figura 13: Misurazione della potenza

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.8)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (4.9)$$

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) \quad (4.10)$$

## 5 Comportamento in frequenza

Un circuito che include componenti reattivi ha una risposta che cambia a seconda della frequenza in entrata.

Le trasformate di condensatori e induttanze sono:

$$\bar{z}_L = j\omega L \quad (5.1)$$

$$\bar{z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (5.2)$$

La velocità angolare  $\omega$  viene espressa in radianti al secondo, ed è uguale a  $\omega = 2\pi f$ , dove  $f$  rappresenta la frequenza in cicli al secondo (Hertz).

Un filtro è un circuito che lascia passare una certa gamma di frequenze, e si distingue in ideale o reale a seconda di quanto può essere preciso (un filtro ideale annulla completamente le altre frequenze, mentre un filtro reale le attenua). Quello che è importante capire nei filtri è che la frequenza rimane invariata, mentre vengono alterati ampiezza e fase del segnale in uscita.

## 5.1 Diagrammi di Bode

Un diagramma di Bode è una rappresentazione della risposta in frequenza di un sistema, come in fig.15. Esso indica come vengono modificati ampiezza e fase del segnale data la frequenza in entrata.

## 5.2 Filtri

### 5.2.1 Filtro RC

Si tratta di un filtro formato da una resistenza e un condensatore in serie. La tensione in entrata è data da:

$$e(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad (5.3)$$

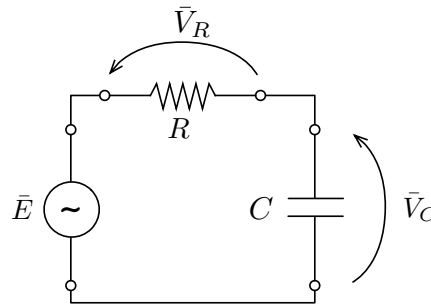


Figura 14: Circuito per RC

Costruendo l'equivalente di Steinmetz si può scrivere la tensione che si può prelevare ai capi del condensatore:

$$\bar{V}_C = \bar{I} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{E}{1 + j\omega RC} \quad (5.4)$$

$$|\bar{V}_C| = \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (5.5)$$

Il filtro risulta essere un passa-basso (considerando la tensione ai capi del condensatore) poiché se la frequenza tende a zero  $\bar{V}_C \rightarrow E$  mentre se tende all'infinito

$\bar{V}_C \rightarrow 0$ . Le frequenze basse non vengono attenuate, mentre quelle alte sì. Da notare che la curva di attenuazione procede in modo naturale e senza discontinuità (fig.15).

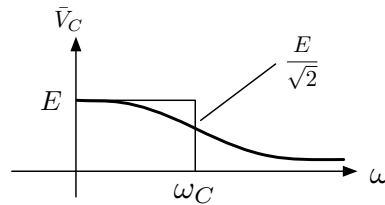


Figura 15: Filtro RC passa-basso

La frequenza di taglio, quindi il valore della velocità angolare in cui si dimezza la potenza (che è legata al quadrato della corrente) si ottiene:

$$\omega_C = \frac{1}{RC} \quad (5.6)$$

Dato che la resistenza non è un componente reattivo, la tensione ai capi di essa è in fase con il generatore, mentre per quello che riguarda la tensione ai capi del condensatore, essa viene sfasata con un angolo di  $90^\circ$  (vedi diagramma vettoriale di fig.16).

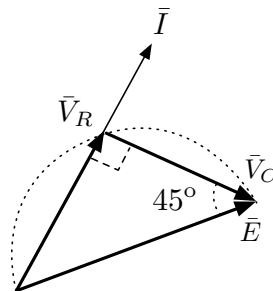


Figura 16: Diagramma vettoriale

Geometricamente la presenza dell'angolo retto implica che tra lo zero,  $\bar{V}_R$  e  $\bar{E}$  esiste una circonferenza, e se si varia il valore del condensatore  $\bar{V}_R$  continua a rimanere su questa circonferenza. Quando ci si trova sul valore della pulsazione

critica  $\omega = \omega_C = \frac{1}{RC}$  la corrente diventa con parte reale e immaginaria uguali:

$$\bar{I} = \frac{E}{R + \frac{1}{jRC}} = E \frac{R + jR}{R^2} = \frac{E}{R} + j \frac{E}{R} \quad (5.7)$$

Dato che le tensioni  $\bar{V}_R$  e  $\bar{V}_C$  sono uguali, l'angolo formato risulta  $-\frac{\pi}{4}$ .

Facendo tendere la frequenza a zero, si nota che la tensione ai capi del condensatore tende a  $\bar{E}$ , mentre quella sulla resistenza diventa infinitesima, viceversa se  $\omega \rightarrow +\infty$  (l'impedenza tende ad annullarsi).

Se nello stesso circuito si prendesse la tensione in uscita sulla resistenza si avrebbe una situazione diversa:

$$\bar{V}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot \frac{\bar{E}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = E \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \quad (5.8)$$

Il modulo della tensione è quindi:

$$|\bar{V}_R| = \frac{E\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \quad (5.9)$$

Il filtro configurato in questo modo ha caratteristiche **passa-alto**.

### 5.2.2 Filtro RL

Risulta simile al filtro RC con la unica differenza che al posto del condensatore vi è una induttanza.

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I} = j\omega L \frac{\bar{E}}{R + j\omega L} \quad (5.10)$$

$$|\bar{V}_L| = E \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = E \frac{\omega \frac{L}{R}}{\sqrt{R + \omega^2 \frac{L^2}{R^2}}} \quad (5.11)$$

$$\omega_L = \frac{R}{L} \implies |\bar{V}_L| = \frac{E}{\sqrt{2}} \quad (5.12)$$

Il filtro ha caratteristiche passa alto se si prende  $\bar{V}_L$ , mentre è passa basso se la tensione si estrae da  $R_L$ .

### 5.2.3 Filtro RLC

Comprende la serie di tutti e tre i componenti, una resistenza, un condensatore e una induttanza.

La corrente di maglia è data:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\bar{E}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (5.13)$$

Dati certi valori specifici di  $L$  e  $C$  si può raggiungere una situazione particolare in cui tensione e corrente vanno in fase, quindi la reattanza del condensatore annulla quella della induttanza. Si forma quindi un fenomeno detto **risonanza serie**.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \bar{I} = \frac{\bar{E}}{R} \quad (5.14)$$

Negli altri casi si ha un filtro passa-banda con una frequenza centrale:

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.15)$$

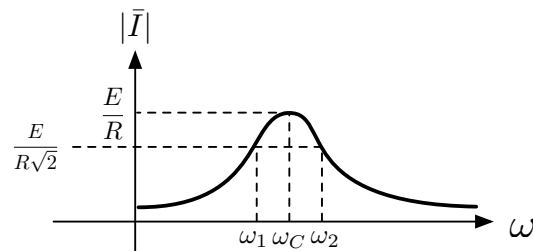


Figura 17: Corrente in un circuito RLC

Nel grafico in fig.17 si nota che alla frequenza  $\omega_C$  il circuito va in risonanza, e non viene effettuata alcuna attenuazione.

La banda  $B$  indica la dimensione dell'intervallo compreso fra le due frequenze di taglio  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Il modulo della corrente si ottiene:

$$|\bar{I}| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (5.16)$$

Sapendo che  $\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = R\sqrt{2}$  si può fare in modo di estrarre le frequenze di taglio:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \pm \frac{R}{2L} \quad (5.17)$$

Da cui si trova che la prima parte della equazione rappresenta la frequenza centrale, e quella dopo  $\pm$  le frequenze di taglio.

La banda risulta quindi molto semplicemente:

$$B = \frac{R}{L} \quad (5.18)$$

### 5.2.4 Notch

Mettendo in parallelo una induttanza e un condensatore si ottiene un filtro che elimina una determinata banda, detto "Notch".

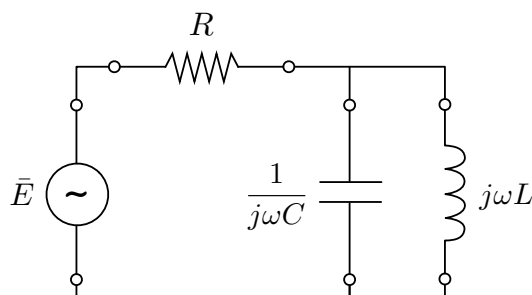


Figura 18: Filtro Notch

Per la frequenza  $\omega$  che tende a infinito oppure zero si ha che la corrente tende a  $\frac{\bar{E}}{R}$ , mentre si ha un punto in cui essa diventa zero dove si raggiunge la frequenza  $\omega^*$ .

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{z}} = \frac{\bar{E}}{R + \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega L}}} = \frac{\bar{E}}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} \quad (5.19)$$

Quando  $\omega \rightarrow 0$  la parte immaginaria si annulla e la seconda parte del denominatore diventa zero, stessa cosa per quando  $\omega \rightarrow +\infty$ , la frazione tende ad essere



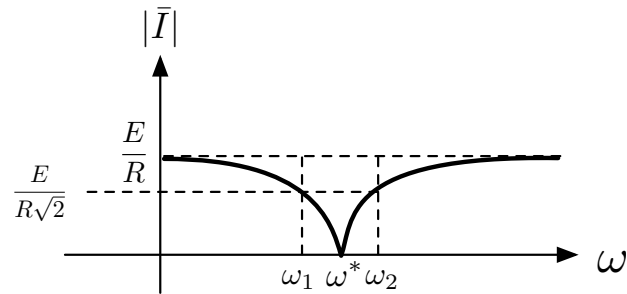


Figura 19: Modulo della corrente per Notch

infinitesima e rimane  $\frac{\bar{E}}{R}$ . In risonanza si hanno due correnti  $\bar{I}_C$  e  $\bar{I}_L$  uguali e opposte che possono essere anche molto forti, quando il circuito funziona in questo modo si dice che si hanno **condizioni di antirisonanza**.

Se si impone  $1 - \omega^2 LC = 0$  si ottiene che:

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.20)$$

La banda si calcola:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \pm \frac{1}{2RC} \quad (5.21)$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC} \quad (5.22)$$

Un uso frequente dei filtri notch è per eliminare il rumore a 50hz presente negli apparati collegati alla corrente domestica.

In un circuito in risonanza non si può fare in modo di utilizzare la energia dei componenti reattivi (per esempio per creare un elevatore di corrente o tensione), dato che andrebbe a "squilibrare" il fenomeno.

### 5.3 Fattore di qualità

Il fattore di qualità può assumere diversi significati:

- (energetico) quantità di energia immagazzinata rispetto a quella dissipata

- Rapporto fra centro banda e larghezza
- Rapporto fra tensione su uno dei componenti reattivi e totale

$$Q := 2\pi \cdot \frac{1}{2}LI_{max}^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}RI_{max}^2T} \quad (5.23)$$

La prima parte della equazione rappresenta la energia immagazzinata da una induttanza percorsa da una corrente, mentre la seconda quella dissipata dalla resistenza in un periodo.

Se si ha una risonanza, quindi  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega^*$ , la formula restituisce la energia di picco immagazzinata dai componenti reattivi di un filtro.

$$Q := \frac{\omega^*}{B} = \frac{\omega^*}{\frac{R}{L}} = \frac{\omega^*L}{R} \cdot \frac{I}{I} = \frac{|\bar{V}_L|}{|\bar{E}|} = V_C \quad (5.24)$$

Quindi rispetto alla banda un filtro sottoposto ad una frequenza più elevata ha una qualità maggiore.

## 5.4 Funzione di trasferimento

Si utilizza una funzione di trasferimento per studiare il funzionamento di filtri e circuiti. Dato un sistema con entrata  $\bar{X}$  e uscita  $\bar{Y}$ , la funzione è data da:

$$\bar{H}(j\omega) := \frac{\bar{Y}(j\omega)}{\bar{X}(j\omega)} \quad (5.25)$$

Per trovare quindi la uscita dato il segnale in entrata e la risposta si fa il prodotto complesso fra i due (somma di fasi, prodotto di moduli):

$$\bar{Y}(j\omega) = \bar{X}(j\omega) \cdot \bar{H}(j\omega) \quad (5.26)$$

Si possono distinguere diversi tipi di trasferimenti:

- $H(j\omega) = \frac{\bar{I}_u}{\bar{I}_i}$  - Guadagno di corrente
- $H(j\omega) = \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i}$  - Guadagno di tensione
- $H(j\omega) = \frac{\bar{V}_u}{\bar{I}_i}$  - Impedenza di trasferimento

- $H(j\omega) = \frac{\bar{I}_u}{\bar{V}_i}$  - Ammettenza di trasferimento

Riprendendo la formula 7.26 si può fare in modo di scrivere numeratore e denominatore come polinomi in funzione di  $j\omega$  in forma estesa ( $n$  indica il numeratore,  $d$  il denominatore):

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{n_0(j\omega)^n + n_1(j\omega)^{n-1} + \dots + n_{n-1}(j\omega) + n_n}{d_0(j\omega)^d + d_1(j\omega)^{d-1} + \dots + d_{d-1}(j\omega) + d_d} \quad (5.27)$$

Gli ultimi termini,  $n_n$  e  $d_d$  sono i termini noti, e  $n, d$  indicano i gradi dei polinomi. Si avranno quindi (teorema fondamentale dell'algebra)  $n, d$  soluzioni denominate  $z \rightarrow$  zeri (numeratore) e  $p \rightarrow$  poli (denominatore). Il tutto si può scrivere quindi direttamente con le soluzioni:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{n_0}{d_0} \cdot \frac{(j\omega - z'_1)(j\omega - z'_2) \dots (j\omega - z'_n)}{(j\omega - p'_1)(j\omega - p'_2) \dots (j\omega - p'_n)} \quad (5.28)$$

Dove  $\frac{n_0}{d_0}$  rappresenta il coefficiente di ordine massimo. Invertendo i segni si ha:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{n_0}{d_0} \cdot \frac{(j\omega + z_1)(j\omega + z_2) \dots (j\omega + z_n)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \dots (j\omega + p_n)} \quad (5.29)$$

Si possono avere casi in cui uno o più poli o zeri si trovino nell'origine, quindi  $p = 0$  oppure  $z = 0$ . Riscrivendo la stessa forma con i termini al denominatore, si fa in modo di estrarre poli e zeri nulli e di portarli in un termine esterno (altrimenti si creano divisioni impossibili).

$$\bar{H}(j\omega) = H_0 \frac{\left(\frac{j\omega}{z_1} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{z_2} + 1\right) \dots \left(\frac{j\omega}{z_n} + 1\right)}{\left(\frac{j\omega}{p_1} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{p_2} + 1\right) \dots \left(\frac{j\omega}{p_d} + 1\right)} (j\omega)^m \quad (5.30)$$

L'ultimo termine contiene tutti i poli e zeri nulli, il numero  $m$  si ottiene facendo la differenza del numero di zeri e poli all'origine.

Una qualunque funzione di trasferimento si può esprimere in questa forma, i termini possono essere reali o complessi coniugati a coppie.

### Esempio 5.1.

Si consideri un filtro RC usato come passa-basso (fig.20).

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \bar{I}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \bar{I}}$$

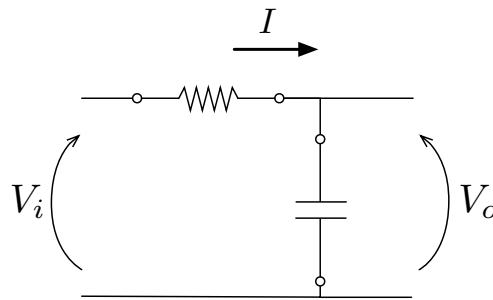


Figura 20: Circuito di riferimento

Calcolando la risposta rispetto alla stessa grandezza (corrente) si può fare in modo di semplificarla.

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{\bar{N}(j\omega)}{\bar{D}(j\omega)}$$

Non ci sono zeri, ma è presente un polo, che si trova risolvendo la parte al denominatore:

$$\begin{aligned} \bar{D}(j\omega) = 0 &\implies j\omega = -\frac{1}{RC} \\ p_1 &= \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

In forma canonica risulta quindi:

$$\frac{1}{\left( \frac{j\omega}{\frac{1}{RC}} + 1 \right)}$$

### Esempio 5.2.

Riprendendo il circuito dell'esempio precedente, si vuole calcolare la risposta quando la tensione viene prelevata sulla resistenza.

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{R\bar{I}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\bar{I}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

Per riconoscere la forma canonica si mette in modo da ricostruire la formula che si cerca, trovando che sono presenti uno zero nell'origine e un polo semplice. Al

numeratore  $RC$  è un termine noto.

$$= \frac{(j\omega + 0)RC}{\left(\frac{j\omega}{\frac{1}{RC}} + 1\right)} = RC(j\omega)^{-1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\frac{1}{RC}} + 1\right)}$$

## 5.5 Concatenazione di filtri

Con la forma utilizzata risulta semplice mettere in cascata diversi circuiti per poter calcolare l'effetto finale. Per concatenare gli effetti di  $n$  filtri basta semplicemente fare il prodotto complesso.

Dato per esempio una entrata  $\bar{X}$  che passa attraverso due filtri con risposte in frequenza  $\bar{H}_1$  e  $\bar{H}_2$  si può calcolare il risultato:

$$\bar{X} \xrightarrow{\bar{H}_1} \bar{Y} \xrightarrow{\bar{H}_2} \bar{Z} \quad (5.31)$$

$$\bar{Z} = \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot \bar{X} \quad (5.32)$$

Si può sfruttare questo principio per osservare la equazione 7.31 come una composizione di singoli contributi al numeratore e al denominatore più il termine noto. Si ha quindi che il segnale passa attraverso ogni singolo "modulo" che lo altera fino ad arrivare ad avere il segnale in uscita.

$$\bar{X} \rightarrow H_0 \rightarrow (j\omega)^m \rightarrow \frac{j\omega}{z_1} + 1 \rightarrow \dots \rightarrow \left(\frac{j\omega}{p_1}\right)^{-1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{Y} \quad (5.33)$$

A questo punto si prende ogni parte e si scompone in ampiezza e fase:

$$\bar{H}(j\omega) = H_0 \cdot e^{j[1-\text{sgn}(H_0)]\frac{\pi}{2}} \cdot |\omega|^m \cdot N_1 \cdot e^{j\varphi_{N_1}} \dots N_n e^{j\varphi_{N_n}} \cdot \frac{1}{D_1} \cdot e^{j\varphi_{D_1}} \dots \frac{1}{D_d} e^{-jD_d} \quad (5.34)$$

L'operatore di segno  $\text{sgn}$  compare solo per prendere la parte complessa corretta di un numero positivo o negativo reale.

Il modulo della funzione di trasferimento è ottenibile moltiplicando i singoli moduli presenti nella equazione, mentre la fase si ottiene con la somma delle fasi:

$$|H(j\omega)| = |H_0| \cdot |\omega|^n \cdot N_1 \dots N_n \cdot \frac{1}{D_1} \dots \frac{1}{D_d} \quad (5.35)$$

$$\angle \bar{H}(j\omega) = [1 - \text{sgn}(H_0)]\frac{\pi}{2} + m\frac{\pi}{2} + \varphi_{z_1} + \dots + \varphi_{z_n} - \varphi_{d_1} - \dots - \varphi_{d_d} \quad (5.36)$$

## 5.6 Decibel

Volendo trasformare nel modulo i prodotti in somme per semplificare l'utilizzo successivo, si utilizzano i logaritmi per indicare le grandezze in **bel** e **decibel**. Essi vengono utilizzati per indicare rapporti fra tensioni e correnti in modo logaritmico.

$$\text{BEL} \rightarrow \log_{10} \frac{P_o}{P_i} \quad (5.37)$$

$$\text{DECIBEL} \rightarrow 10 \log_{10} \frac{P_o}{P_i} \text{ [dB]} \quad (5.38)$$

Per esempio, se un amplificatore è dichiarato che guadagna 10dB di potenza vuol dire che la potenza in ingresso e quella in uscita differiscono di un ordine di grandezza, quindi ne esce una grande 10 volte quella in ingresso.

Quando si mettono in paragone altre grandezze bisogna portare fuori il quadrato della potenza (dato che la potenza è il quadrato della corrente), ottenendo una forma diversa per tensione e corrente:

$$20 \log_{10} \frac{V_u, I_u}{V_i, I_i} \quad (5.39)$$

$I_u/I_i$	$\log_{10}$	$20 \log_{10}$
1000	3	60dB
100	2	40dB
10	1	20dB
2	0.3	6dB
$\sqrt{2}$	0.15	3dB
1	0	0
$1/\sqrt{2}$	-0.15	-3dB
1/2	-0.3	-6dB
1/10	-1	-20dB

Tabella 1: Logaritmi

Usando i decibel e la scala logaritmica, si può fare in modo di disegnare il diagramma di Bode come una somma di contributi, rendendo più facile il tutto. Inoltre è possibile esprimere in un solo sistema quantitativo valori molto grandi e molto piccoli assieme.

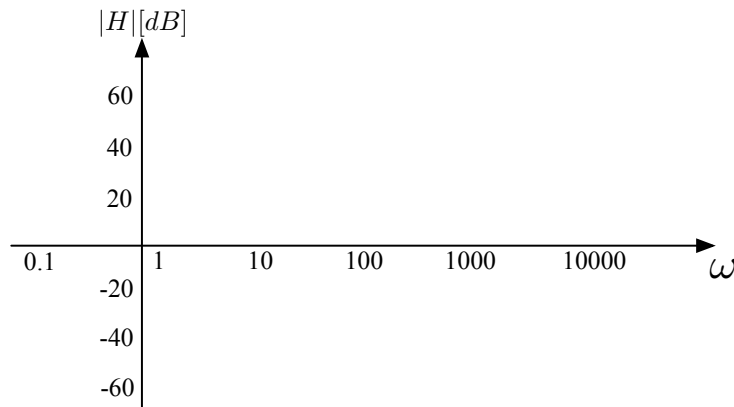


Figura 21: Diagramma di Bode in decibel

Osservando il diagramma in fig.21 si nota che l'asse delle frequenze (rad/s) non ha lo zero, esso va a  $-\infty$  per come funziona il logaritmo. Di conseguenza la frequenza zero non è rappresentabile, per convenzione l'asse delle ordinate è fissato nel punto 1.

A questo punto si può creare il diagramma del modulo sommando ogni contributo:

$$20 \log |\bar{H}(j\omega)| = 20 \log |H_0| + m 20 \log(\omega) + 20 \log \left| \left( \frac{j\omega}{z_1} + 1 \right) \right| + \dots - 20 \log \left| \left( \frac{j\omega}{p_d} + 1 \right) \right| \quad (5.40)$$

1.  $20 \log |H_0|$ , questo dà un contributo costante, quindi trasla il grafico verticalmente.
2.  $20 \log \omega$ , si ha un contributo lineare, quindi una retta con pendenza variabile (20db/dec per  $m = 1$ ) che passa per (1, 0).
3.  $20 \log \left| \left( \frac{j\omega}{z_1} + 1 \right) \right|$ , qui si avrebbe una curva, che può essere semplificata in una retta che cambia pendenza da un certo punto. Per valori in cui  $|j\omega| \ll z_k$  vale  $0dB$ , mentre per valori dove  $|j\omega| \gg z_k$  la retta è data da  $20 \log \omega - 20 \log z_k$ . Si ha quindi una retta di pendenza costante di 20 dB/dec (decibel per decade) che parte da  $z_k$  (fig.22).
4.  $-20 \log \left| \left( \frac{j\omega}{p_d} + 1 \right) \right|$ , vale la stessa cosa del punto precedente, ma il grafico è ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

Per il diagramma della fase vale un discorso simile:

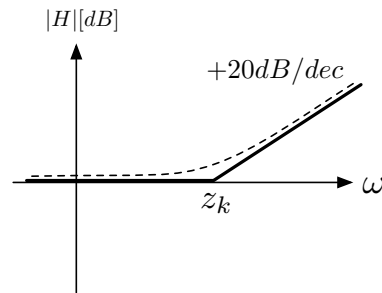


Figura 22: Modulo di un componente della equazione

1. 0 oppure  $180^\circ$
2.  $m\frac{\pi}{2}$
3. Qui si può semplificare con  $0^\circ$  e  $90^\circ$  studiando il diagramma in modo asintotico come prima oppure utilizzare un modello matematico più accurato che approssima meglio la curva (fig.23).
4. Stessa cosa per prima,  $0^\circ$  e  $-90^\circ$ .

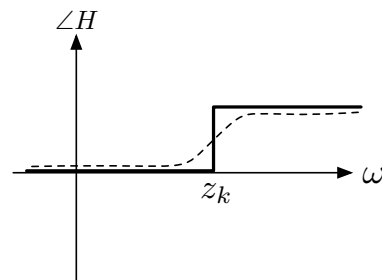


Figura 23: Fase del componente singolo

## 5.7 Filtro RLC

Dato il circuito in fig.24, si vuole ricavare la funzione di trasferimento.

In modo molto facile si esegue il rapporto fra la uscita e la entrata:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{R\bar{I}}{(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})\bar{I}} = RC(j\omega) \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1} \quad (5.41)$$



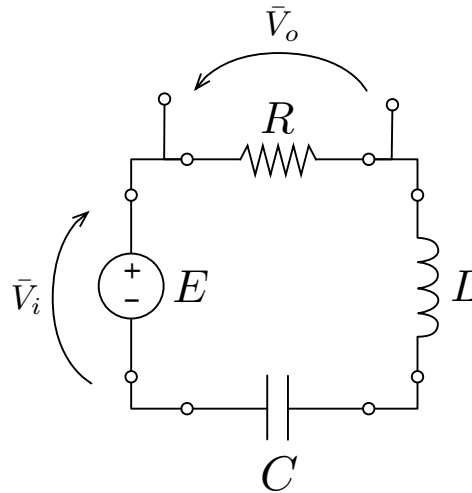


Figura 24: Filtro RLC di riferimento

Si possono avere diversi tipi di soluzioni, con due poli reali e distinti, reali e coincidenti o complessi coniugati.

### Poli reali e distinti

#### Esempio 5.3.

Prendendo come valori  $E = 2V$ ,  $L = 10^{-4}H$ ,  $R = 0.2\Omega$ ,  $C = 40mF$ , si calcola la funzione di trasferimento:

$$\bar{H}(j\omega) = 8 \cdot 10^{-3}(j\omega) \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{130} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{1870} + 1\right)}$$

Il grafico della risposta in frequenza è in fig.25. Si può notare che il valore  $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  rappresenta la media geometrica fra 130 e 1870, quindi è esattamente alla punta della curva.

### Poli complessi coniugati

$$\bar{H}(j\omega) = RC(j\omega) \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\sigma_1 + j\omega_1} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{\sigma_1 - j\omega_1} + 1\right)} \quad (5.42)$$

La equazione viene indicata con il denominatore sotto forma di equazione di secondo grado in funzione di  $j\omega/\omega^*$ ):

$$\bar{H}(j\omega) = RC(j\omega) \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right) + 1} \quad (5.43)$$

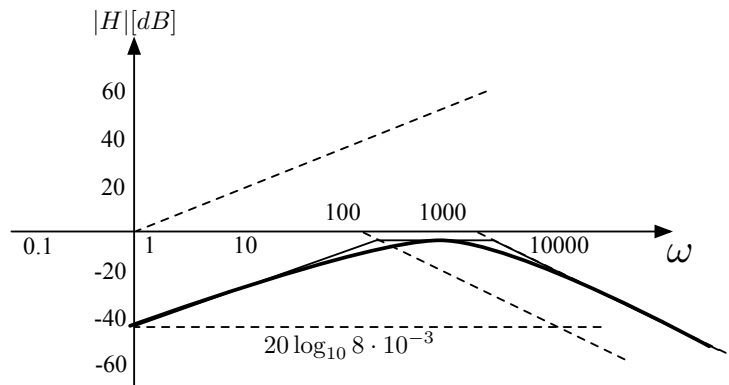


Figura 25: Filtro RLC di riferimento

Dove  $\omega^* = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}$  e  $\delta = \frac{\sigma_1}{\omega^*}$ .

Si impone il denominatore a zero per cercare le soluzioni:

$$\left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right)^2 + 2\delta \left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right) + 1 = 0 \quad (5.44)$$

$$\frac{j\omega}{\omega^*} \Big|_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1} \quad (5.45)$$

Possono essere quindi distinti tre casi:

- $\delta > 1$  - Soluzioni reali e distinte (sistema sovrasmorzato, non oscilla)
- $\delta = 1$  - Soluzioni reali e coincidenti (smorzamento critico)
- $\delta < 1$  - Soluzioni complesse coniugate (sistema sottosmorzato, oscilla)

Studiando la funzione per  $\omega$  che varia rispetto al valore centrale  $\omega^*$ , si ottiene che la fase varia da  $0^\circ$  a  $180^\circ$ :

$$20 \log \left| \left[ \left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right)^2 + 2\delta \left(\frac{j\omega}{\omega^*}\right) + 1 \right] \right| \quad (5.46)$$

$$\omega \ll \omega^* \rightarrow \simeq 1 \quad 0^\circ \quad (5.47)$$

$$\omega \gg \omega^* \rightarrow \simeq 20 \log \left| \frac{j\omega}{\omega^*} \right|^2 \quad 180^\circ \quad (5.48)$$

$$(5.49)$$

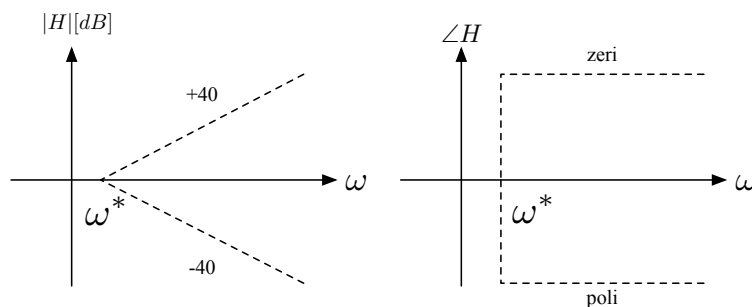


Figura 26: Zeri e poli

Quando ci si avvicina alla frequenza di risonanza  $\omega^*$  si ha che il valore diventa  $20 \log(-1 + 2\delta j + 1)$ . L'errore è dato dal rapporto tra cosa esce dalla approssimazione e il guadagno vero:

$$ERR = \frac{1}{2\delta} \quad (5.50)$$

Il valore  $\delta$ , detto **fattore di smorzamento**, a seconda di come varia può rendere questo errore più grande (se è più piccolo). Per esempio per un valore  $\delta$  uguale a 0.005 il guadagno si aggira sui  $40dB$ .

$$\delta = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q} \quad (5.51)$$

Quindi più  $\delta$  è alto più smorzate saranno le oscillazioni nel punto di risonanza, e viceversa.

Il fattore di qualità indica come viene filtrata la banda, quindi se bisogna amplificare il segnale,  $Q$  deve essere basso, altrimenti vengono generate oscillazioni.

#### Esempio 5.4.

Si prenda il circuito in fig.27, vengono dati i valori  $R = 0.2\Omega$ ,  $L = 10^{-4}H$ ,  $C = 40mF$ . Si vuole calcolare la funzione di trasferimento  $\bar{H}(j\omega)$ .

Per ottenerla si fa il rapporto fra la corrente in uscita e la corrente in entrata:

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{I}_u}{\bar{I}_i} = \frac{\bar{V}(\frac{1}{j\omega C})^{-1}}{(\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C)} = \frac{j\omega C(R + j\omega L)}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}$$

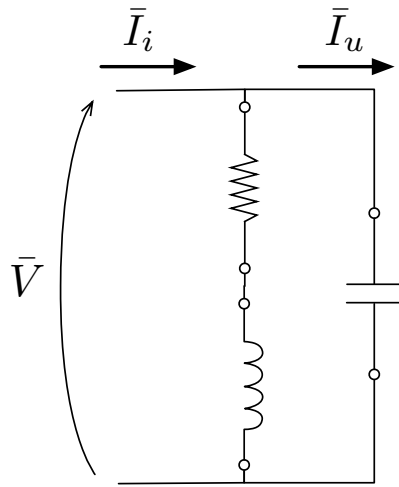


Figura 27: Circuito di riferimento

Inserendo i valori:

$$\bar{H}(j\omega) = 8 \cdot 10^3(j\omega) \frac{\left(\frac{j\omega}{2000} + 1\right)}{\left(\frac{j\omega}{120} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{1300} + 1\right)}$$

Da qui si può costruire il grafico in fig.28.

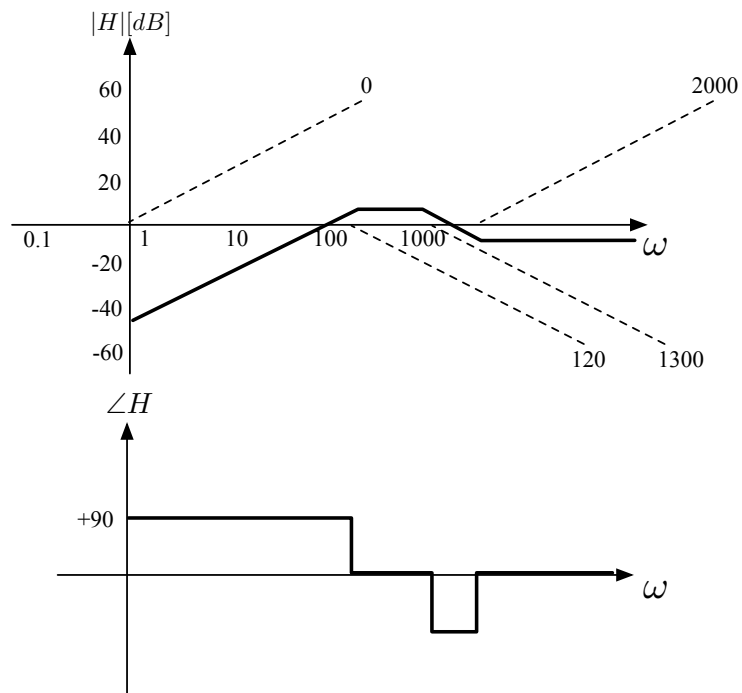


Figura 28: Circuito di riferimento