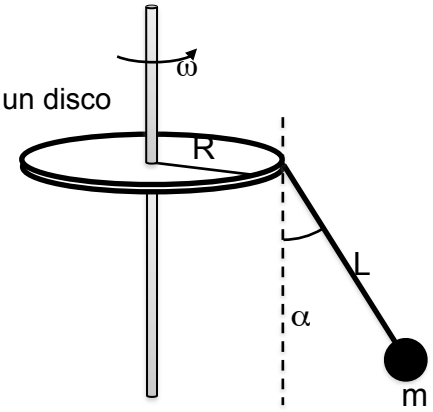
FISICA 1 (M-P) - PROVA SCRITTA 4.5.2013

PROBLEMA 1



Un pendolo di lunghezza L = 30 cm e massa m = 0.1 kg è fissato sul bordo di un disco circolare di raggio R = 10 cm che ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale passante per il proprio centro. In queste condizioni si osserva il pendolo inclinato di un angolo $\alpha = 60°$ rispetto alla verticale.

Determinare:

a) il valore della velocità angolare ω;

b) la tensione cui è soggetto il filo che sostiene la massa m.

Sia T la tensione del cavo che sorregge la massa m; la sua proiezione sulla verticale deve uguagliare mg, dunque $T \cos 60^0 = T/2 = 0.1 \times 9.8 \Rightarrow$ ***T = .2×9.8=1.96 N.***

La stessa tensione, cioè la sua componente orizzontale, deve fornire l'accelerazione centripeta alla massa m: dunque $T \sin\alpha = (R+L \sin\alpha)\, m\, \omega^2$

$$T \cos\alpha = mg$$

Dividendo membro a membro si ottiene $\tan\alpha = (R+L\sin\alpha)\,\omega^2/g$

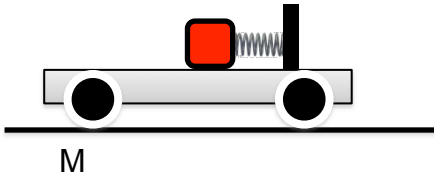
da cui ***ω = 6.87 rad/s.***

Con il metodo di Lagrange: $v^2 = (L\cos\alpha)^2 (d\alpha/dt)^2 + (R+Ls in\alpha)^2\, \omega^2$.

$L=½m\,(L\cos\alpha)^2 (d\alpha/dt)^2 +½m\,(R+L\sin\alpha)^2\,\omega^2+mgL\cos\alpha$. Equilibrio: $d\alpha/dt=0$,

$\partial L/\partial\alpha = 0 = m(R+L\sin\alpha)L\cos\alpha\,\omega^2 - mgL\sin\alpha$ e si riottiene l'equazione

già nota.



PROBLEMA 2

Una massa m = 1 kg, che si trova su di un carrello di massa M = 10 kg, viene spinta da una molla di costante elastica k = 100 N/m, che inizialmente è compressa per una lunghezza $\Delta x = 0.2$ m rispetto alla sua posizione di riposo. Sapendo che inizialmente tutto il sistema è in quiete e che gli attriti sono trascurabili, determinare:

a) la velocità del carrello quando la massa m si stacca dalla molla;

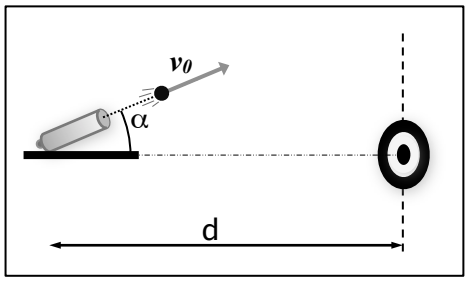
b) La velocità finale del centro di massa.

Il sistema è isolato, dunque il momento lineare totale si conserva. Ne segue che

$mv+MV=0$. *Inoltre si conserva l'energia: l'energia cinetica delle due masse proviene dalla energia potenziale della molla:* $mv^2+MV^2=k\,\Delta x^2$. *Inserendo i numeri si trova subito*

V = 0.19 m/s. Il centro di massa è immobile prima e dopo per il fatto che il sistema è isolato. Dunque $V_{cm}=0$.

FISICA 1 (M-P) - PROVA SCRITTA 4.5.2013



PROBLEMA 3

Da una piattaforma è sparato un proiettile con velocità iniziale v_0 = 20 m/s con un'inclinazione α = 30° rispetto all'orizzonte. All'istante iniziale, ad una distanza d = 40 m, un bersaglio che si muove con velocità costante V_0 in direzione verticale si trova alla stessa quota del proiettile. Il bersaglio viene colpito dal proiettile dopo un tempo t*. Trascurando l'attrito dell'aria sul proiettile, determinare:

1. **il tempo t*** trascorso tra l'istante iniziale e il momento dell'impatto con il bersaglio;

Il moto orizzontale ha velocità costante v_0 cos α, dunque il proiettile percorre la distanza d in

d/ v_0 cos α = 40/10√3 sec = 2.31 sec.

2. **il modulo e il verso della velocità del bersaglio**; *La posizione verticale del proiettile è data da $z=v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ e quindi impatta sul bersaglio alla quota 10 t -4.9 t² = -3.05 m rispetto alla quota iniziale. Il bersaglio dovrà quindi percorrere questa distanza in 2.31 sec e perciò la sua velocità è*

*di **1.32 m/s.***

3. **la quota massima raggiunta dal proiettile rispetto alla quota iniziale.** *Derivando $z=v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ rispetto al tempo si trova l'altezza a cui la velocità verticale si annulla: $dz/dt = v_0 \sin\alpha - gt = 0$, da cui $t_0 = v_0 \sin\alpha / g$ = 10/9.8 e $z(t_0)$ = 5.1 m.*

PROBLEMA 4

Un satellite artificiale è in orbita circolare intorno alla Terra. Il raggio dell'orbita è R_1=47500 km. Sapendo che la distanza media Terra-Luna è $R_2 \approx$ 384400 km e il periodo medio dell'orbita lunare è T_2=27.4 giorni, calcolare

1) il periodo dell'orbita del satellite, tenendo conto solo dell'attrazione terrestre: *secondo Kepler III si ha $(T_1/T_2)^2 = (R_1/R_2)^3$; dunque T_1 = 27.4 (47500/384400)^(3/2) ≈ 1.19 g ≈ 28 ore ½.*

2) l'energia che bisogna fornire al satellite per sottrarlo all'attrazione terrestre e portarlo in orbita solare lasciando indeterminata la massa del satellite; la risposta sarà della forma

$$\Delta E \approx N\ J \times (m/10^3\ kg)$$

In un'orbita circolare si ha $mv^2/R = GMm/R^2$ e quindi l'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ vale esattamente la metà del valore assoluto dell'energia potenziale: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}GMm/R$. Per sfuggire all'attrazione terrestre il satellite deve portarsi a energia totale nulla quindi gli si deve fornire tanta energia quanta è la sua attuale energia cinetica:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(2\pi R_1/T_1)^2\ 10^3\ (m/10^3\ kg) = \mathbf{4.2 \times 10^9\ J\ (m/10^3\ kg)}$$

Ossia 4.2×10^9 J per ogni tonnellata. Allo stesso risultato si giunge utilizzando GM per la Terra (dagli Esercizi: N.3, $GM=4.02 \times 10^{14}\ m^3/s^2$) e calcolando $\frac{1}{2}\ GM/R_1$.

FISICA 1 (M-P) - PROVA SCRITTA 4.5.2013

PROBLEMA 5

Un tavolo simile a un biliardo con pareti perfettamente elastiche è modificato in modo che una parete risulta mobile cosicché lo spazio a disposizione va diminuendo nel tempo. La parete mobile si trova inizialmente a distanza L_o dalla parete di fronte e le si avvicina a una velocità fissa pari a u. Una palla, considerata semplicemente come un punto materiale ignorando la sua natura di corpo rigido, parte con velocità $v_o > u$ (parallela al lato lungo del biliardo) e va a rimbalzare sulla parete fissa per poi incontrare di nuovo la parete mobile e così via. Si chiede

1. **qual'è la distanza tra le pareti a cui avviene il primo rimbalzo sulla parete mobile?**

Intanto che la parete si sposta di $u\,t_o$ la palla percorre $2L_o - u\,t_o$ alla velocità v e deve metterci lo stesso tempo, quindi $t_o = (2L_o - u\,t_o)/v$ ossia $t_o = 2L/(u+v)$ e infine la distanza tra le pareti a ltempo t_o è $L - u\,2L/(u+v)$ = ***L(v-u)/(v+u)****.*

3. **Qualè la velocità della palla dopo questo rimbalzo**?

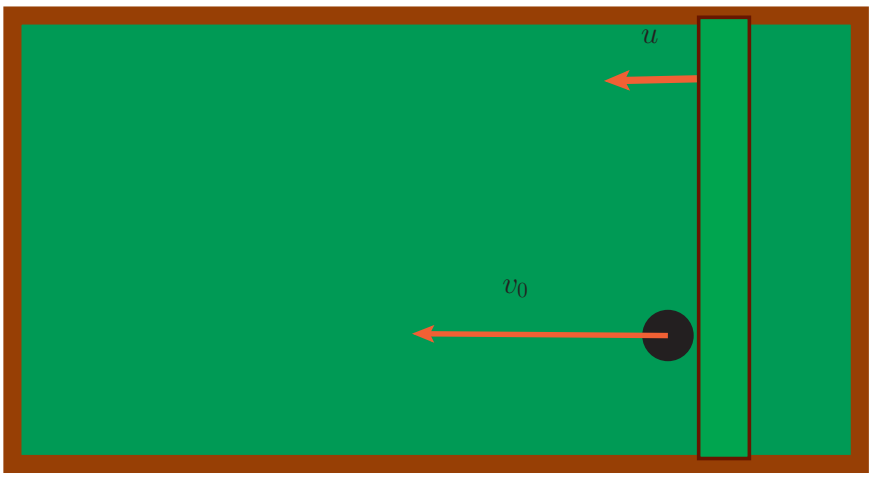
Se ci mettiamo nel sistema inerziale di riferimento della parete mobile, vediamo la palla che arriva con velocità v+u e rimbalza con la stessa velocita` -(v+u). Nel sistema fisso perciô la velocità dopo il rimbalzo è ***v+2u*** *(si veda la Lezione 8, pag.7 "TIR contro Panda").*

4. Qualè l'energia della palla dopo sei rimbalzi consecutivi? *Ad ogni rimbalzo sulla parete mobile la palla aumenta la velocità di 2u, quindi dopo sei rimbalzi complessivi (due su entrambe le pareti) avrà raggiunto la velocità v+6u. La sua energia cinetica sarà perciò $(1+6u/v)^2$ rispetto a quella iniziale $\frac{1}{2}mv^2$.*

5. Come mai la sua energia va aumentando nel tempo? Da dove viene questa energia?

La parete mobile fornisce l'energia, come una racchetta da tennis o una da pinpong.

Se rimane tempo oppure per *homework*: *esiste una formula esplicita che dà la velocità v(n) e la distanza L(n) tra le pareti dopo un numero qualunque di rimbalzi - naturalmente prima che lo spazio a disposizione si riduca a zero! Se la trovate, la esporrete alla classe una delle prossime lezioni.*



Il calcolo generale si imposta cosí: siano t_1, t_2, t_3, etc gli istanti in cui la palla colpisce la parete mobile. Negli intervalli tra un rimbalzo e l'altro la velocità si mantiene costante in modulo. Si avrà allora

$$L_n + L_{n+1} = v_n(t_{n+1} - t_n)$$

Inoltre ad ogni rimbalzo a destra la velocità aumenta di 2u (¹)

$$v_{n+1} = v_n + 2u$$

e sappiamo che le pareti si avvicinano con velocità u

$$L_n - L_{n+1} = u(t_{n+1} - t_n)$$

Eliminiamo i tempi tra la prima e la terza equazione, cosí otteniamo

$$L_{n+1} - L_n = -u(L_{n+1} + L_n)/v_n$$

e semplificando si trova

$$L_{n+1} = L_n \frac{v_n - u}{v_n + u}$$

che abbiamo già visto per n=0. Si nota anche che

$$L_{n+1}(v_{n+1} - u) = L_n(v_n - u)$$

ossia il prodotto L(v-u) è una costante del moto. L'intervallo tra due rimbalzi sarà infine

$$t_{n+1} - t_n = \frac{L_{n+1} + L_n}{v_n} = L_n \frac{1 + \frac{v_n - u}{v_n + u}}{v_n} = \frac{2L_n}{v_n + u}$$

$$= \frac{2L_n(v_n - u)}{v_n^2 - u^2} = \frac{2L_0(v_0 - u)}{v_n^2 - u^2}$$

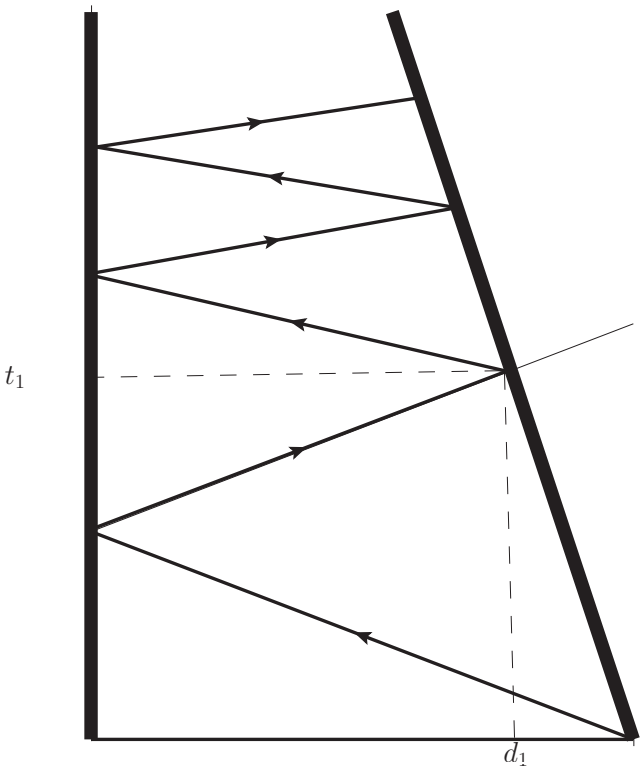
e quindi diminuisce progressivamente tendendo a zero come $1/n^2$. In linea di principio se la palla è puntiforme ci saranno ... infiniti rimbalzi.

(¹) Controllate gli urti in una sola dimensione. m2 -> infinito.

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m + 1 + m_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m + 1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

FISICA 1 (M-P) - PROVA SCRITTA 4.5.2013



$$v_0 \times t_1 = 2L_0 - d,\ u \times t_1 = d$$

$$(u + v_0)t_1 = 2L_0 \rightarrow L1 = L_0 \frac{v_0 - u}{v_0 + u}$$

Diagramma spazio-temporale - molto utile per rappresentare l'evoluzione nel tempo, utilizzato un tempo nelle Ferrovie!