FISICA GENERALE I - PROVA SCRITTA DEL 24.6.2014

La prova è organizzata in due parti. Coloro che devono ricuperare una parte possono affrontare i problemi della Parte I o della Parte II, secondo quanto è necessario, e devono consegnare l'elaborato entro ***due ore*** *dall'inizio. In questo caso sarà considerato sufficiente (18) l'elaborato con* ***almeno 4 risposte corrette e complete****; punteggio superiore in presenza di altre risposte corrette; risposte sbagliate, a seconda della gravità dell'errore, potranno pesare negativamente. Il compito farà media con l'eventuale prova intermedia sostenuta con successo durante l'anno. Coloro che devono sostenere l'esame per intero hanno a disposizione* ***tre ore****. L'elaborato in questo caso sarà considerato sufficiente (18) in presenza di almeno* ***3 risposte corrette nella prima Parte più 3 nella seconda****, con punteggi superiori in funzione del numero di risposte corrette.* ***Non è consentito l'uso di testi e appunti di ogni genere né quello di smartphone collegati a internet.*** *Per favore,* ***riportare i risultati nella tabella che trovate in fondo al testo;*** *potete inserire qualche commento per illustrare il metodo seguito.*

Parte I - Meccanica del punto e del corpo rigido

Problema 1.1

Un cannone di artiglieria pesante emette un proietto di massa *m=30Kg* alla velocità di *110 m/s*

1.1.1 *Qual'è l'inclinazione che bisogna impostare nel cannone in modo che il proietto arrivi alla massima distanza?*

1.1.2 Sapendo che il cannone ha una massa M=1100Kg quale sarà la velocità con cui si muove orizzontalmente appena dopo lo sparo con l'inclinazione scelta al punto precedente?

1.1.3 Stessa domanda del n.1.1.2 ma con inclinazione di 30^0.

Soluzione 1.1

E` un esercizio del tutto standard di Fisica Galileiana: chiamando v_1, v_2 le componenti orizzontale e verticale della velocità, il proietto rimane in volo un tempo t^* doppio di quello t necessario a raggiungere il vertice della parabola:

$$v_2(t) = v_2 - g\,t\ = 0 \Rightarrow t^* = 2\,v_2/g$$

In questo tempo il proietto percorre una distanza lungo l'orizzontale pari a

$$v_1\,t^* = 2\,v1\,v2\,/g$$

Dato che $v_1 = v\cos\alpha$, $v_2 = v\sin\alpha$, si trova $distanza = \sin 2\alpha\ v2/g$ e pertanto la massima gittata si ottiene per **$\alpha = 45^0$**. Il rinculo del cannone è calcolabile imponendo la conservazione del momento lineare nella direzione orizzontale, quindi

$$m\,v1 = M\,V$$

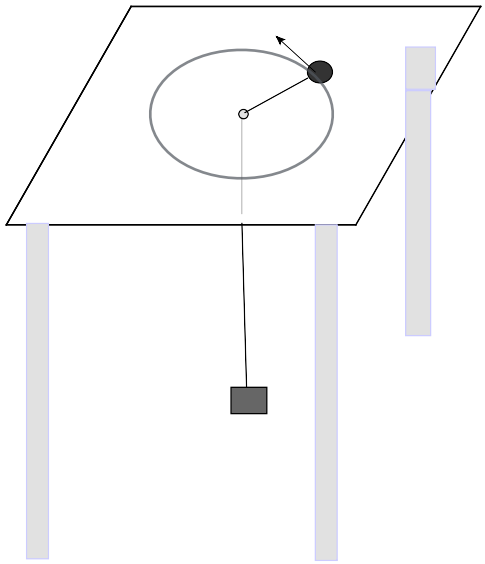
e cioè *V = 30/1100 ×110 cos 45^0 = 3 /√2 =* ***2.12 m/s****.* Se l'alzo è di 30^0 ovviamente
V = *30/1100 ×110 cos 30^0 = 3 √3 /2 =* ***2.60 m/s.***

Problema 1.2

Un disco liscio di massa m=100g si muove lungo una traiettoria circolare di raggio r=10cm su un piano perfettamente liscio grazie a un cavo sottile inestendibile e di massa trascurabile che collega il disco a una massa M=500g attraverso un foro praticato nel tavolo. La massa M è libera di muoversi verticalmente sotto l'azione del suo peso. Si chiede

1.2.1 *Quale è la velocità tangenziale v_0 affinché la massa M mantenga la sua posizione verticale costante?*

1.2.2 Se il disco ha una velocità v pari alla metà (v=½ v_0) il disco compie una traiettoria simile a una ellisse; qual'è la distanza minima dal foro r_1 raggiunta in questo caso dal disco e
1.2.3 quale sarà la sua velocità v_1 quando raggiunge la distanza minima?



Soluzione 1.2
La forza che tiene in moto rotatorio uniforme la massa *m* è fornita dal peso di M e quindi

$$m\, v^2 / r = M\, g$$

(1.2.1) $v = \sqrt{(M\, g\, r/m)} = (500/100 \times 0.1 \times 9.81)^{½} =$ ***2.21 m/s.***

Il moto in generale è quello di una massa m in un campo di forze centrale, in quanto la forza è sempre diretta verso il foro sul tavolo. La differenza rispetto al caso gravitazionale è che invece di una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro siamo in presenza di una forza costante (Mg). Restano però valide le leggi di conservazione dell'energia meccanica totale e del momento angolare. Nei due punti che ci interessano, il punto piu` lontano e quello più vicino al foro, la velocità radiale si annulla e quindi il momento angolare è semplicemente il prodotto velocità × distanza. Chiamando con r_a = r , v_a = v/2 le grandezze nel punto iniziale (più distante dal centro) e con r_p, v_p le grandezze incognite relative al punto più vicino, si ha

$$½\, m\, v_a^2 + M\, g\, r_a = ½\, m\, v_p^2 + M\, g\, r_p$$

$$r_a\, v_a = r_p\, v_p$$

due equazioni con due incognite quindi si può cercare la soluzione con un pò di algebra. Dalla prima equazione, eliminando v_p in base alla seconda equazione, si trova

$$½\, m\, v_a^2\, ((r_a/r_p)^2 - 1) = M\, g\, (r_a - r_p)$$

da cui, moltiplicando per r_p^2 ,

$$½\, m\, v_a^2\, (r_a^2 - r_p^2) = M\, g\, (r_a - r_p)\, r_p^2$$

Ora si può eliminare un fattore comune $r_a - r_p$ per ottenere un'equazione quadratica per r_p

$$\boldsymbol{M\, g\, r_p^2 = ½\, m\, v_a^2\, (r_a + r_p)}$$

L'equazione si risolve facilmente e si trova

(1.2.2) $\boldsymbol{r_p = 7/16\, r_a = 4.38\ cm}$

La velocità in quel punto è data dalla relazione $r_a\, v_a = r_p\, v_p$ e quindi

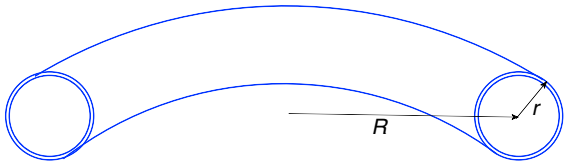
(1.2.3) $\boldsymbol{v_p = 16/7\, v_a = 5.05\ m/s}$ **.**

FISICA GENERALE I - PROVA SCRITTA DEL 24.6.2014

Problema 1.3

Una stazione spaziale in orbita circolare intorno alla terra ad una quota di $5000Km$ ha una forma simile a una ciambella di sezione circolare di raggio r=5m e un diametro 2R=60m, di cui vediamo una metà in figura. Considerata come un corpo rigido la stazione ha un momento di inerzia rispetto al suo asse di simmetria dato da $I = M(R^2+\frac{3}{4}r^2)$ essendo $M=1200\ tonnellate\ (1.2\times10^6\ Kg)$. Sulla circonferenza esterna della stazione sono posti dieci propulsori capaci di dare una spinta $F = 2000\ N$ ciascuno. Si chiede

1.3.1 *Qual'è la velocità angolare a cui deve ruotare la stazione in modo che al suo interno si percepisca un campo gravitazionale pari a quello sulla superficie terrestre?*
1.3.2 Per quanto tempo si devono azionare i propulsori per raggiungere da ferma la velocità angolare richiesta al punto precedente?



Soluzione 1.3

L'obiettivo è quello di creare all'interno della stazione una forza simile alla gravità in modo da ricreare un ambiente di lavoro a cui il personale è abituato sulla Terra. La forza è fornita, nel sistema non inerziale della stazione in rotazione, dalla forza centrifuga. Dunque dobbiamo fare in modo che

$$v^2 / (R+r) = g$$

prendendo come riferimento i punti più distanti dall'asse di rotazione. È presumibile che nella stazione venga posto un pavimento piatto che si allontana dalla circonferenza esterna, quindi la distanza sarà un pò inferiore a *R+r*, ma questo è ininfluente all'atto pratico (anche sulla Terra *g non è uguale dappertutto!)* Dunque

(1.3.1) $$v = \sqrt{(g\ (R+r))} \Longrightarrow \omega = \sqrt{(g\ /(R+r))} \approx 0.53\ rad/s$$

Detto I il momento di inerzia della stazione, e indicando con α la posizione angolare, si deve avere

$$I\ d^2\alpha/dt^2 = 10\ F\ (R+r)$$

a destra avendo inserito il momento delle forze sviluppate dai propulsori periferici. Dunque $\omega = 10\ F\ (R+r)\ t / I$ da cui

$$t = I\ \omega\ /(10\ F\ (R+r))$$

Ora, dalla formula indicata nel testo, si ricava I = 1.1×10^9 Kg m^2 . Inserendo poi i valori di F, R, r si trova

(1.3.2) $$\boldsymbol{t \approx 833\ s}$$

Parte II - Oscillazioni e meccanica dei fluidi

Problema 2.1

Il getto d'acqua nel lago di Ginevra giusto al centro della città elvetica raggiunge normalmente un'altezza di 60m. Determinare
2.1.1 *La velocità del getto d'acqua alla sua fuoriuscita dalla tubatura.*
2.1.2 La pressione a cui è sottoposta l'acqua nella tubatura.

Soluzione 2.1

Dall'uscita dal tubo alla sommità del getto si scambia il termine $v^2/2g$ a quota zero con velocità zero alla quota h=60m. Dunque

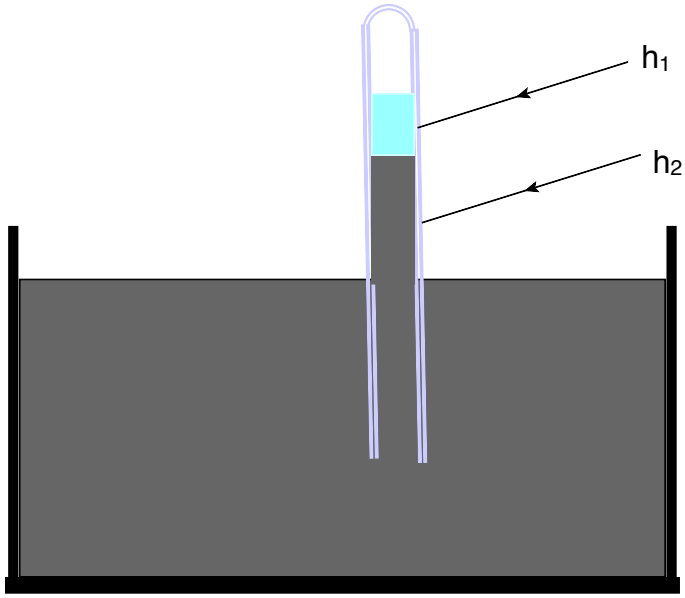
(2.1.1) $$v^2/2g=h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 34.3\ m/s$$

La pressione all'interno della tubatura deve sovrastare la pressione atmosferica di una quantità che fornisca la spinta all'acqua, dunque

(2.1.2) $$P - P_0 = h\,\rho\,g \approx 5.9\ atm$$

Ho ritenuto corrette sia le risposte con 5.9 atm sia quelle in cui si aggiunge P_0 e quindi ≈6.9.

Problema 2.2 Una canna barometrica come nell'esperimento di Torricelli contiene uno strato d'acqua alto $h_1=10\ cm$ sopra il mercurio (densità $13.6\ g/cm^3$). Se la pressione atmosferica è di $90\ kPa$ ($90000\ Pascal$)



2.2.1 qual'e` l'altezza h_2 del mercurio nella canna rispetto alla quota nella bacinella?

Soluzione 2.2
$P_0 = h_1\rho_1\,g + h_2\rho_2\,g$ dove "1" si riferisce all'acqua e "2" al mercurio. Da qui si ricava h_2 che risulta ***66.7cm.***

Problema 2.3
Si narra che il Re Gerone di Siracusa avesse affidato un lingotto d'oro a un orafo per farne una corona. Sospettando che l'orafo avesse tenuto per se una parte dell'oro, Gerone chiese ad Archimede di trovare un metodo per verificare che la corona, il cui peso era in effetti lo stesso di quello iniziale dell'oro, fosse interamente in oro e non in qualche altro metallo meno prezioso. Archimede sfruttò il principio che porta il suo nome per mostrare che in effetti c'erano dei dubbi sull'onestà dell'orafo. I dati: peso del lingotto $p_1=17.0N$, peso della corona identico a p_1, tuttavia il peso misurato in acqua risultò $p_2=15.7N$; densità dell'oro $\rho_{Au}=19.3g/cm^3$. Si chiede
2.3.1 *Le misurazioni sono compatibili con il fatto che la corona sia costituita d'oro massiccio?*
2.3.2 Se il volume del lingotto iniziale e quella della corona sono uguali, si può concludere che l'orafo ha agito in modo disonesto?

Soluzione 2.3

È più un problema di logica che di Fisica. Dalla pesata in acqua confrontata con quella in aria, senza nulla sapere del volume, si ricava informazione sulla densità:

$$peso_{acqua} = \rho\,V\,g - \rho_0\,V\,g$$
$$peso_{aria} = \rho\,V\,g$$

Dividendo membro a membro si trova

$$(\rho - \rho_0)/\rho = 15.7/17$$

da cui la densità della corona è stimata in 13.1 g/cm^2. Le conslusioni possono essere due: la densità è inferiore perchè la corona contiene dei vuoti al suo interno che ne aumentano il volume, e in questo caso l'oro c'è tutto, ma non è "massiccio" come vorrebbe il Re. Oppure il volume potrebbe essere aumentato introducendo materiale meno pregiato e meno denso dell'oro, ad es. stagno, e ciò implica un furto ai danni del Re. In entrambi i casi il Re non ottiene quell che aveva ordinato e quindi la testa dell'orafo è in pericolo. Alla seconda domanda si può rispondere che l'unica conclusione sensata è che … Archimede ha sbagliato la pesata, perchè peso uguale e volume uguale implicano la stessa densità e quindi l'errore sta nella misura del peso in acqua. In questo caso la testa dell'orafo è al sicuro.

Problema 2.4

Un'autoambulanza sta avvicinandosi marciando sulla strada nella vostra stessa direzione. Voi sapete che a) viaggiate a $80\ km/h$, b) la sirena è tarata ad emettere un suono puro a $455\ Hz$, c) il vostro orecchio perfetto percepisce invece una frequenza di $475\ Hz$.
2.4.1 A quale velocità viaggia l'autoambulanza?
2.4.2 Nel caso sia presente un forte vento nella stessa direzione del moto proveniente dalle vostre spalle ad una velocità di $80\ km/h$ vi aspettate che l'effetto sarebbe molto diverso? Spiegate.

Soluzione 2.3
La formula dell'effetto Doppler ci dice che la frequenza percepita ν' è data da

$$\nu' = \nu \, \frac{1 - v_r/V}{1 - v_s/V}$$

dove v_r è la velocità del ricevitore, e v_s quella della sorgente. Infine $V=341 m/s$ è la velocità del suono in condizioni tipiche. Inserendo i dati del problema si trova

$$v_s = V \left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right) + \frac{\nu}{\nu'} \, v_r$$

che dà $v_s = 35.64\ m/s = 128.3\ Km/h$.

La situazione cambia leggermente nel csao ci sia un vento che spira alle spalle dei veicoli con una velocità che uguaglia quella della vettura. In questo caso la vettura è ferma rispetto all'aria e l'autoambulanza viaggia a velocità pari alla differenza v_s-$v_r = 13.4\ m/s$ e qundi l'effetto Doppler dà una frequenza pari a

$$\nu'' = \nu \, \frac{1}{1 - (v_s - v_r)/V}$$

che numericamente vale $\nu'' \approx 473.6$ Hz. Quindi c'è una piccola differenza ma difficilmente percepibile all'orecchio. La ragione di questo fatto risiede nel conftonto tra le due formule per ν' e ν''. Per velocità piccole rispetto alla velocità del suono possiamo sviluppare in serie di potenze nel parametro v/V utilizzando la serie geometrica $(1-x)^{-1} \approx 1+x+x^2+\ldots$ fino a ottenere $\nu'/\nu'' \approx 1 - (v_s-v_r)^2/V^2 = .998$ cioè una differenza solo del 1.5 per mille.

	Risultati
1.1.1	45^0
1.1.2	$2.12\ \mathrm{m/s}$
1.1.3	$2.6\ \mathrm{m/s}$
1.2.1	2.21 m/s
1.2.2	4.37 cm
1.2.3	5.05 m/s
1.3.1	0.53 rad/s
1.3.2	830 s
2.1.1	34.3 m/s
2.1.2	5.9 oppure 6.9 atm
2.2	66.7 cm
2.3.1	$\rho = 13.1\ g/cm$
2.3.2	L'unica conclusione è che Archimede ha sbagliato la misura (succede)
2.4.1	128.3 km/h
2.4.2	La differenza c'è ma non è percepibile all'orecchio (0.15%)