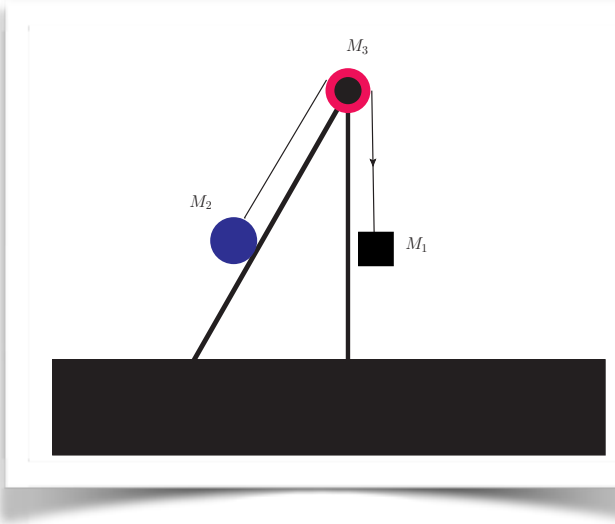
FISICA GENERALE I - PROVA SCRITTA DEL 15.9.2014

La prova è organizzata in due parti. Coloro che hanno già superato una delle due parti dell'esame devono completare la prova scegliendo i problemi della prova ancora da superare; ad ogni problema risolto verrà attribuito un punteggio da 0 a 10 in base alla correttezza e completezza dei risultati; in questo caso si deve consegnare l'elaborato entro ***due ore*** *dall'inizio. Coloro che devono sostenere l'esame per intero hanno invece a disposizione* ***tre ore****. In questo caso ad ogni problema viene assegnato un punteggio da 0 a 8; dunque è necessario risolvere almeno tre problemi, di cui uno nella Parte I, uno nella Parte II e il resto a scelta. Non è consentito l'uso di testi e appunti di ogni genere né quello di smartphones collegati a internet.*

Parte I - Meccanica

Problema I.1

Come indicato in fugura, ci sono due masse M_1, M_2 connesse da una fune inestendibile; la fune ha massa trascurabile; la massa M_2 è costituita da un cilindro omogeneo di raggio R=3cm che *rotola senza strisciare* sul piano inclinato che forma un angolo di 60^0 con l'orizzontale, mentre la massa M_1 è libera di muoversi in direzione verticale appesa alla fune. Questa è appoggiata a una carrucola di massa M_3 che è costituita da un cilindro omogeneo di raggio uguale ad R. Non c'è dissipazione per attrito in nessuna parte dell'apparato.



I.1.1 Indicando con h l'altezza della massa M_1 rispetto al piano orizzontale, si scriva l'energia totale del sistema.

I.1.2 Si calcoli l'accelerazione verticale della massa M_1 nel caso che le masse abbiano i seguenti valori: M_1=.75kg, M_2=0.5kg, M_3=0.2kg e sia R=3cm.

Soluzione: Indicando con h la distanza in verticale della massa M_1 dal supporto, si trova per l'energia cinetica: $K = ½ M_1 (dh/dt)^2 + ½ M_2 (dh/dt)^2 + ½ I_2 \omega^2 + ½ I_3 \omega^2$ dove $\omega = dh/dt / R$. Dunque

$K = ½(M_1 + 3/2 M_2 + ½ M_3) (dh/dt)^2$. A questo bisogna aggiungere l'energia potenziale

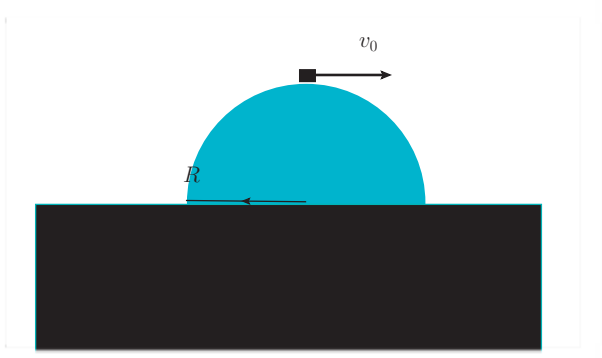
$V = M_1 g h - M_2 g h \sin\alpha$, dove $\alpha = 60^0$. In definitiva l'energia totale è data da

$E = ½(M_1 + 3/2 M_2 + ½ M_3) (dh/dt)^2 + M_1 g h - M_2 g h \sin\alpha$. Imponendo (assenza di attrito) che $dE/dt=0$ si trova l'accelerazione della massa M_1:

$a = - g (M_1 - M_2 \sin\alpha)/(M_1 + 3/2 M_2 + ½ M_3) = -1.94\ m/s^2$. Il segno negativo sta a indicare che il moto di M_1 è accelerato verso il basso e che il moto delle altre masse frena la caduta di M_1 .

Problema I.2

Una massa che si può considerare puntiforme è posta su un profilo liscio di forma cilindrica avente raggio R, come mostrato in figura. Alla massa viene impartita una velocità iniziale v_0 . Si chiede



I.2.1 Qual'è il valore massimo della la velocità v_0 tale che la massa comincia a scendere rimanendo

aderente al profilo?

I.2.2 Nell'ipotesi che la velocità iniziale sia minore o uguale al valore calcolato in precedenza e tenendo conto dell'accelerazione della massa dovuta alla forza di gravità, esiste un punto in cui la massa si distacca dal profilo cilindrico e, se sí, a quale altezza ciò avviene?

Soluzione: Il problema sta nel valutare la forza centrifuga dovuta al moto circolare della massa lungo il profilo cilindrico e vedere se questa è compensata dalla componente del peso in direzione radiale. All'istante iniziale il peso è in direzione radiale e quindi è sufficiente richiedere

$$m\,g \geq m\,v_0^2/R$$

ossia $v_0 \leq \sqrt{(g\,R)}$ *. In seguito, la velocità aumenta per via della caduta nel campo di gravità secondo la relazione che rappresenta la conservazione dell'energia:*

$$\tfrac{1}{2}m\,v^2 + m\,g\,R\cos\vartheta = \tfrac{1}{2}m\,v_0^2 + m\,g\,R$$

essendo ϑ *l'angolo misurato a partire dal punto più alto. Ora la condizione sulla forza di gravità radiale diventa*

$$m\,g\,\cos\vartheta \geq m\,v^2/R = m/R\,(v_0^2 + 2\,g\,R\,(1-\cos\vartheta))$$

Ne segue

$$\cos\vartheta \geq \tfrac{2}{3} + v_0^2/(3\,R\,g)$$

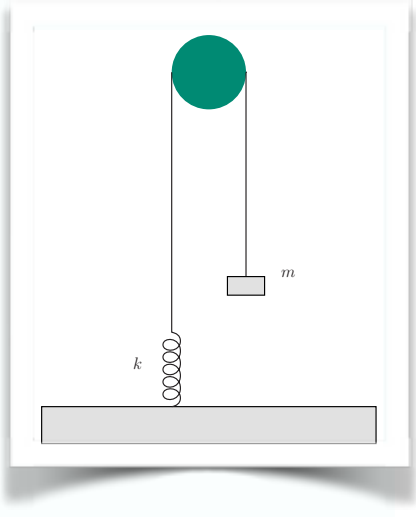
Ora, senz'altro $v_0^2 \leq g\,R$*, diciamo che* $v_0^2 = \eta\ g\,R$*, con* $\eta \leq 1$*. Allora segue la condizione*

$$\cos\vartheta \geq \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\eta$$

Nel limite in cui la massa viene spinta con velocitā iniziale piccolissima, tanto per dargli l'avvio verso la discesa, si trova che $\cos\vartheta \geq \tfrac{2}{3}$ *ossia l'atezza a cui la massa si distacca dalla superficie è esattamente ⅔ R; l'angolo è leggermente più grande di* $\pi/4$*.*

Problema I.3

La figura descrive un sistema meccanico costituito da una massa *m* collegata attraverso una fune inestendibile, di massa trascurabile, ad una molla perfettamente elastica ancorata alla base e avente modulo di elasticità *k*. La carrucola cui è sospesa la fune è costituita da un cilindro omogeneo di raggio R e massa M.



I.3.1 Determinare l'energia totale del sistema in funzione dello scostamento dalla posizione di equilibrio.

I.3.2 Trovare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema in funzione di m, k, M, R, e dell'accelerazione di gravità g. (Si troverà che la frequenza NON dipende da <u>tutte</u> queste grandezze, ma solo da alcune).

Soluzione

Immaginiamo di avere inizialmente la molla scarica per l'assenza della massa m. Quando agganciamo la massa la molla si allunga fino a una lunghezza $\Delta x = mg/k$ *in modo cioè che la sua forza equilibra il peso di m. A questo punto introduciamo la variabile x che misura lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio. Si*

avrà per l'energia potenziale:

$V(x) = \frac{1}{2} k (x + \Delta x)^2 + m g h.$

Ma h (l'altezza della massa m dal supporto) è legata a x in quanto $x+\Delta x+h = L$ = costante. *Dunque* $V(x) = \frac{1}{2} k (x + \Delta x)^2 + m g(L - x - \Delta x)$. *Sviluppando quest'ultima espressione si trova (ricordare che* $\Delta x = mg/k$*)* $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ + costante. *L'energia cinetica comprende due termini:* $K = \frac{1}{2} m (dx/dt)^2$ + *l'energia cinetica della carrucola che vale* $M (dx/dt)^2 /4$. *La conservazione dell'energia ci dà perciò*

$$(m+M/2)\, d^2x/dt^2 = - k x$$

e la frequenza delle piccole oscillazioni è $\omega = \sqrt{k/(m+M/2)}$, *dunque indipendente da g e da R.*

Parte II - Onde e fluidi

Problema II.1

Una sorgente sonora (diciamo un'auto della Polizia che aziona una sirena) si sta avvicinando a noi, fermi a lato della strada, ad una velocità di 90km/h. La sirena è tarata su una frequenza di *1760Hz.*

II.1.1 Qual'è la frequenza che percepiamo noi tenendo conto della velocità della vettura?

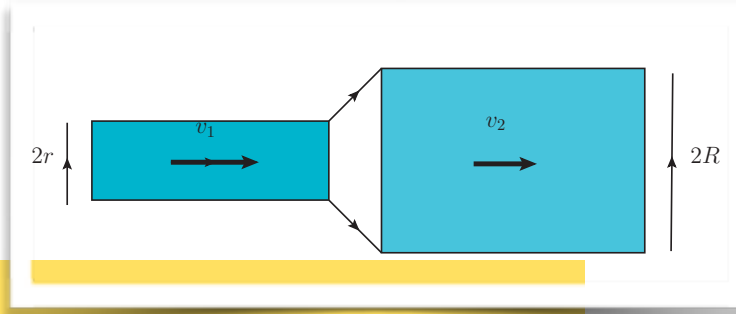
II.1.2 In un'altra situazione, siamo noi ad avvicinarci a 90 km/h ad una vettura ferma che emette lo stesso suono con la sirena. In tal caso qual'è la frequenza percepita?

Soluzione: l'effetto Doppler dà la formula

$\nu' = \nu /(1 - v/v_s)$ *per la sorgente in avvicinamento, e* $\nu'' = \nu (1 + v/v_s)$ *per il ricevitore in avvicinamento. Il rapporto* ν''/ν' *è chiaramente minore di uno anche se molto vicino a uno. Inserendo i valori si trova* $\nu' = 1899$ Hz, $\nu'' = 1889$ Hz.

Problema II.2

Un tubo a sezione circolare con raggio *r=2cm* conduce acqua ad una velocità di $v_1 = 4$ *m/s* e la pressione dell'acqua è superiore di $p_1 = 20$ *kPa rispetto alla pressione atmosferica* (si dice che p_1 è la pressione relativa). Il tubo confluisce in un altro tubo di sezione maggiore (di raggio R) e la pressione relativa in questo secondo tubo è $p_2 = 26$ *kPa.*



Si chiede:

II.2.1 Qual'è la velocità v_2 *nel secondo tubo?*

II.2.2 Qual'è il valore di R?

Soluzione:

E` un'applicazione semplice dell'equazione di Bernoulli:

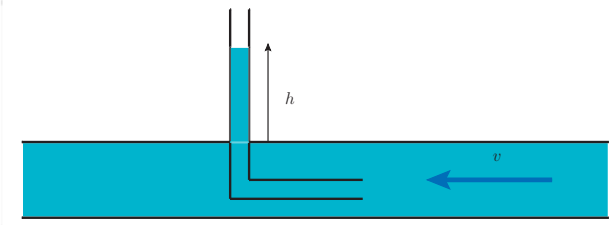
$p_1 / (\rho g) + \frac{1}{2} v_1^2 / g = p_2 / (\rho g) + \frac{1}{2} v_2^2 / g$

Si ha allora

$v_2^2 = v_1^2 + 2 (p_1 - p_2) / \rho = 16 + (2 (20-26)) = 4$ *(m/s)*^{2} *da cui* $v_2 = 2$ *m/s. Dato che il flusso si deve conservare il prodotto* $v_2 R^2$ *coincide con* $v_1 r^2$ *e quindi* $R = r\sqrt{2} = 2.82$ *cm.*

Problema II.3

Una conduttura sotterranea è percorsa da un flusso d'acqua mantenuto a pressione relativa molto bassa, cioè la pressione è praticamente quella atmosferica. Si vuole misurare la velocità del flusso d'acqua. A



questo scopo, è presente un tubo a forma di L con un braccio nella direzione opposta alla corrente e l'altro, orientato verticalmente, esce dalla conduttura attraverso un'apertura a tenuta. In questo tubo verticale l'acqua raggiunge un'altezza *h=50 cm* rispetto alla conduttura. Si chiede:

II.3.1 Qual'è la velocità del flusso d'acqua all'interno della conduttura?

Soluzione: il dislivello deve compensare la differenza $\frac{1}{2} v^2 / g$ *nel flusso principale e* $v=0$ *nel tubo a L: dunque* $v = \sqrt{2gh} \approx 3.13 m/s$.