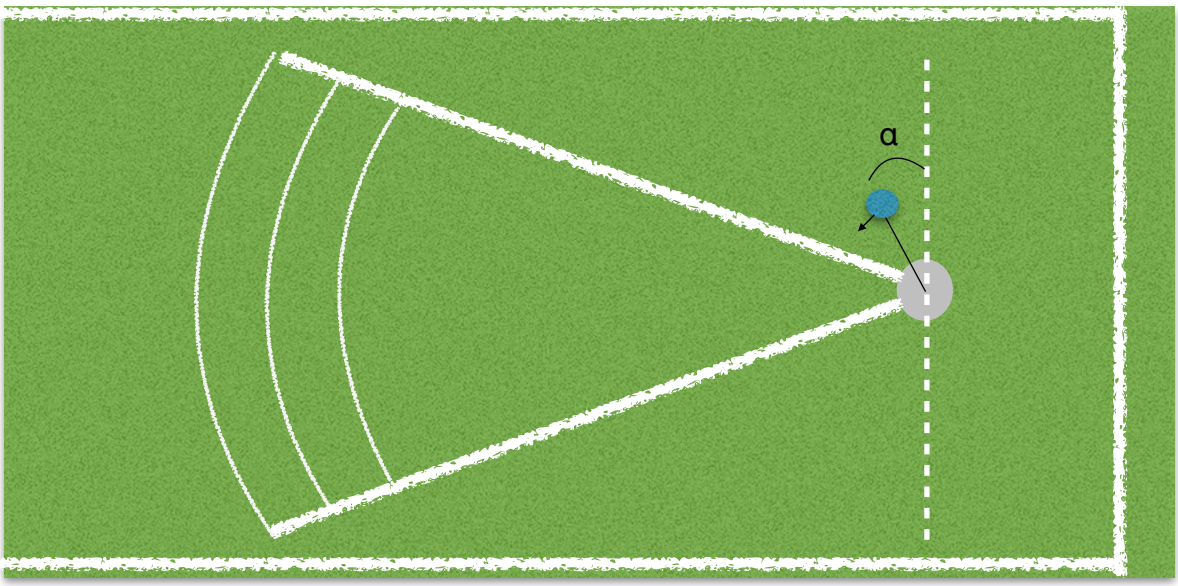
Nome e Cognome_____

email _____

N. mat. _____

Non è consentito l'uso di testi e appunti di ogni genere né quello di dispositivi collegati a internet. *Per favore,* ***riportare i risultati nella tabella che trovate in fondo al testo;*** *potete inserire qualche commento per illustrare il metodo seguito. Tempo della prova: 2 ore.*

Problema 1 "Lancio del martello" - Un atleta che partecipa alla gara olimpica del



lancio del martello, allo scopo di scagliare l'attrezzo alla massima distanza, lo fa ruotare con la forza delle sue braccia secondo un'orbita circolare orizzontale di raggio R=120.cm e dopo un certo numero di giri preparatori gli fa raggiungere una velocità angolare di tre giri al secondo. Si chiede:

1.1 *che distanza raggiunge il martello se viene lanciato con una inclinazione di 30^0 rispetto al piano orizzontale?*

1.2 I*l lancio è valido se il martello atterra entro un settore di ampiezza 30^0 con vertice nel punto di lancio. Detto α l'angolo a cui il martello viene rilasciato dall'atleta misurato rispetto al bordo campo di destra, in quale intervallo dovrà stare α perchè il lancio sia valido? (α=0 ad esempio siglifica staccare l'attrezzo quando passa sulla linea tratteggiata; il disegno del martello non è ovviamente in scala!). Per maggiore chiarezza indicare sul grafico a penna in quale punto deve avvenire il rilascio dell'attrezzo.*

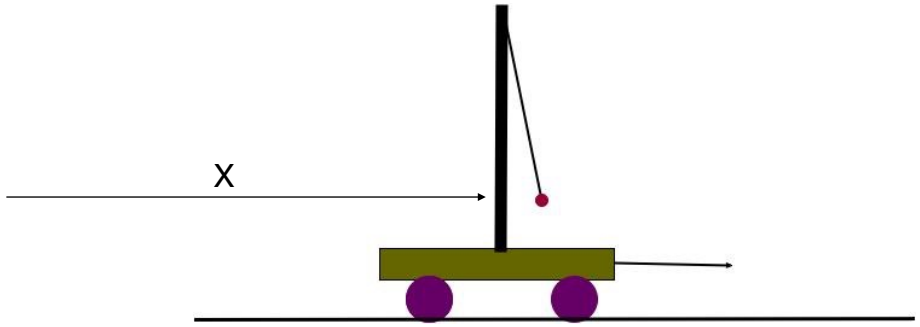
R.1 È lo stesso calcolo già visto per il proiettile lanciato da un cannone. Si tratta di calcolare la velocità iniziale $v = \omega R = 3 \times 2\pi \; x \; 1.2 = 22.62 \; m/s$. Il martello resta in volo per un tempo $t = 2 \; v \; sin \; \phi \; /g$ e in questo tempo percorre una distanza $s = v \; cos \; \phi \; t$ e quindi $s = v^2 \; sin \; 2\phi \; /g = 45.17$ (avendo approssimato al cm). *Quando l'atleta rilascia l'attrezzo, questo prosegue liberamente lungo la tangente alla traiettoria ("parte per la tangente…") e questa direzione deve stare all'interno del settore indicato in figura; ne segue che il punto di distacco deve stare a una posizione angolare* $-15^0 < \alpha < 15^0$.

Problema 2 Un cavo inestendibile di lunghezza $L=60 \; cm$ con una massa $m=250 \; g$ all'estremità è posto su un carrello che viene accelerato su un piano orizzontale all'accelerazione costante $a=1.0 \; m/s^2$. Indicando con α l'angolo di inclinazione del cavo rispetto alla verticale,

2.1 scrivere l'equazione del moto nel sistema di riferimento del carrello.

2.2 Determinare l'angolo in cui il pendolo è in equilibrio statico rispetto al carrello.

2.3 Se la massa totale del carrello è $M=2.5 \; Kg$ e il carrello è non più accelerato ma libero di muoversi senza attrito sul piano, trovare l'equazione del moto e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni.



R.2 La descrizione della dinamica nel sistema di riferimento del carrello è identica a quella del pendolo semplice in cui però la forza gravitazionale si combina con la forza inerziale a dare una forza complessiva F = (-ma, -mg); l'equazione del moto, attraverso lo stesso calcolo effettuato per il pendolo semplice dara`

$$d^2\varphi/d^2t = -g'/L \; sin \; \varphi$$

dove g' è il modulo di F/m, cioè $(9.81^2 + 1^2)^{½} = 9.86$. La frequenza delle piccole oscillazioni è perciò $\omega = (g'/L)^{½} = 4.05 \; rad/s.$ Il pendolo può stare in equilibrio stabile lungo la direzione della forza (gravita` + forza inerziale) a un angolo $\theta = \tan^{-1}(a/g) \approx 5.82^0$. Per il terzo quesito il calcolo è più complesso. Il sistema è isolato relativamente al moto lungo la direzione orizzontale, quindi la componente del momento lineare MV_x+mv_x risulta costante nel tempo. Sfrutteremo questo fatto per semplificare il calcolo. Sia X la posizione del carrello e φ l'angolo formato con la verticale del pendolo. Allora la posizione della massa all'estremità del pendolo è (X + L sin φ, h - L cos φ), dove h è l'altezza del punto cui è appeso il pendolo. Segue, approssimando sin φ ≈ φ e cos φ ≈1, v = (dX/dt + L dφ/dt,0), K (energia cinetica totale) ≈ ½M $(dX/dt)^2$ + ½m $(X/dt + L \; d\varphi/dt)^2$ =

$\frac{1}{2}(M+m)\,(dX/dt)^2 + m\,L\,d\phi/dt\,dX/dt + \frac{1}{2}m\,(L\,d\phi/dt)^2$. L'energia potenziale è data da $m\,g\,L\,(1-\cos\phi) \approx \frac{1}{2}\,m\,g\,L\,\phi^2$. Si trova perciò per l'energia totale l'espressione

$$\frac{1}{2}(M+m)\,(dX/dt)^2 + m\,L\,d\phi/dt\,dX/dt + \frac{1}{2}m\,(L\,d\phi/dt)^2 + \frac{1}{2}\,m\,g\,L\,\phi^2 .$$

Adesso teniamo conto della conservazione del momento lineare: $M\,dX/dt + m\,(dX/dt + L\,d\phi/dt) = 0$. Sostituendo dX/dt nella espressione della energia cinetica troviamo $K = \frac{1}{2}\,m\,M\,(d\phi/dt)^2 / (M+m)$. Da notare che compare la *massa ridotta* nel termine cinetico, mentre nell'energia potenziale troviamo la massa *m*. Di conseguenza l'energia totale è quindi la stessa di un pendolo semplice, ma l'equazione del moto sara` modificata dal fattore $(1 + m/M)$ e cioè

$$d^2\phi/dt^2 = -\,g\,(1+m/M)/L\,\phi$$

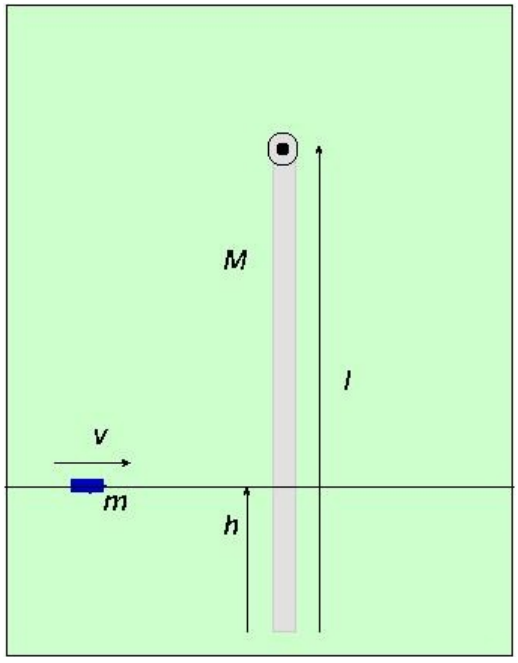
il che comporta che la frequenza delle piccole oscillazioni è maggiore di quella che si avrebbe se il pendolo fosse ancorato a una base fissa di una percentuale $1/\sqrt{(1+1/10)} \approx 1.05$. Naturalmente se il carrello fosse un vagone ferroviario di molte tonnellate la correzione $O(m/M)$ sarebbe del tutto trascurabile.

Problema 1.3

Una sbarra rigida omogenea di lunghezza $l=1.0m$, spessore trascurabile e massa $M = 4.0Kg$ è incernierata a un suo estremo e può ruotare liberamente intorno ad esso. A un certo istante, trovandosi la sbarra ferma nella posizione verticale di minima energia, un proiettile di massa $m=100g$ in moto orizzontale con velocità v colpisce la sbarra ad una distanza $h=l/3$ dalla sua estremità inferiore, rimanendovi conficcato.

1.3.1 Calcolare la minima velocità del proiettile affinchè la sbarra, che forma un tutt'uno con il proiettile, si metta ad oscillare con un'ampiezza $\alpha=30^0$ ($\pi/6$ rad).

1.3.2 Calcolare l'energia dissipata nell'urto anelastico.



R.3 Bisogna porre attenzione al fatto che il sistema sbarra rigida + proiettile NON è isolato, in quanto la sbarra è vincolata a ruotare intorno al punto di sospensione. Tuttavia il momento risultante delle forze intorno a questo punto è zero e dunque si conserva il momento angolare totale. Questo si calcola facilmente:

Prima dell'urto: ⅔ L m v

Dopo l'urto: $I\,\omega$ —- essendo I il momento di inerzia della sbarra aumentato dalla presenza della massa del proiettile dunque

$$I = \tfrac{1}{3} M L^2 + m(\tfrac{2}{3}L)^2 = \tfrac{1}{3}(M+4/3m) L^2$$

Cosí possiamo esprimere ω in funzione di v: $\omega = 2\,m\,v\,/(M + 4/3\,m)/L$

Sapendo che la sbarra arriva a un'ampiezza di 30 gradi, questo ci dice che l'energia gravitazionale e` data da $(ML/2 + 2m\,L/3)\,g\,(1-\cos 30^0)$ *e questa pero` deve coincidere con l'energia cinetica appena dopo l'urto e cioè*

$$K = \tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

Dall'uguaglianza ricaviamo ω e quindi v. Si trova

$$\omega^2 = 1/I\,(M + 4/3\,m)/L\;\; g\,(1-\sqrt{3}/2) = 2\,m\,v\,/(M + 4/3\,m)/L$$

e

$$\tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2 = \tfrac{1}{2} L(M+4/3\,m)g\,(1-\cos 30^0) = 3g/L\,(1-\sqrt{3}/2)$$

Da queste formule, inserendo i dati numerici, si ricava

v = 41.04 m/s

$E_{fin} \approx 2.71$ J

$E_{in} \approx 84.21$

e pertanto la maggior parte dell'energia del proiettile viene dissipata.

Ing. Info-Elettr.Telecom.: FISICA GENERALE I - PROVA SCRITTA DEL 8.5.2015

	Risultati
1.1	
1.2	
2.1	
2.2	
2.3	
3.1	
3.2	