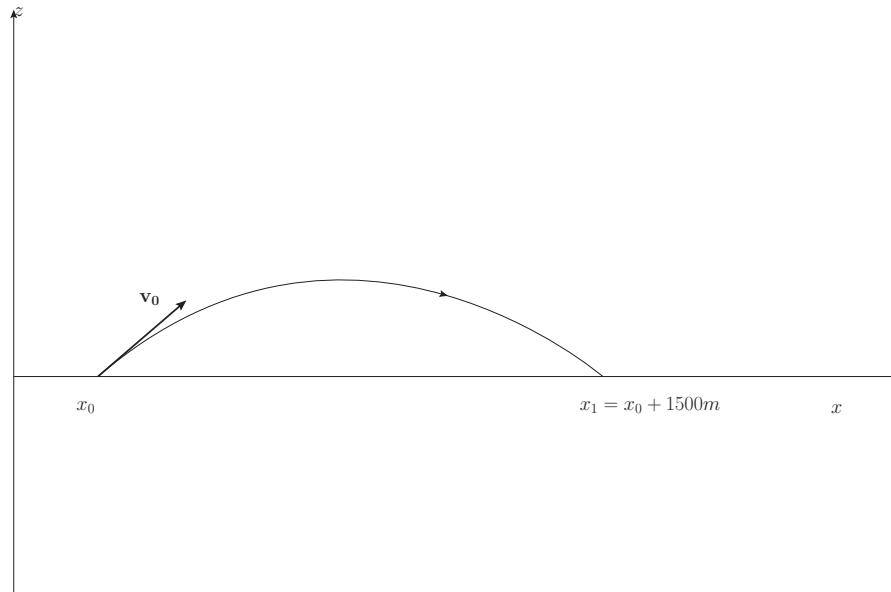


Nella directory /Dropbox/Fis1-2014/Documents si trovano alcuni files dall'organizzazione "Particle Data Group" tratte dal sito web <http://pdg.lbl.gov> con il valore più accurato disponibile di varie costanti fisiche fondamentali e costanti astronomiche. Nella soluzione degli esercizi questi valori possono essere di aiuto.

Cinematica.

Esercizio 1. Un cannone è in grado di conferire una velocità di 200m/s a un proietto del peso di 100kg . Calcolare l'inclinazione del cannone in modo che il proietto colpisca un bersaglio alla stessa quota del cannone distante 1500m . Se la massa fosse di 200kg come cambierebbe il risultato?

FIGURE 1. La traiettoria del proietto dell'Es.1



Soluzione. Il moto del proietto, trascurando l'attrito dell'aria, è il frutto di un moto orizzontale a velocità costante e un moto verticale accelerato con accelerazione di gravità $a = 9.8\text{m/s}^2$. Indicando con α l'angolo di inclinazione del cannone, si avrà che la velocità orizzontale vale

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

e questa rimane costante durante il volo. La velocità iniziale in direzione verticale è invece

$$v_z = v_0 \sin \alpha .$$

Il moto lungo z è un moto uniformemente accelerato, esprimibile come

$$z = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Il proietto raggiungerà il punto più alto per poi ricadere verso terra. Ciò avverrà all'istante t tale che

$$v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

ossia $t = 2v_0 \sin \alpha / g$. Dobbiamo richiedere che a questo istante si abbia che la posizione orizzontale coincida con $x_2 = 1500\text{m}$, dunque

$$(v_0 \cos \alpha) \times (2v_0 \sin \alpha / g) = x_1 - x_0 = 1500 \text{ m} .$$

Questo ci dà la condizione

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha) = g(x_1 - x_0) / v_0^2 = 9.8 \times 1500 / 200^2 = .3675$$

ossia $\alpha = 10^0 46' 48''$. Si noterà che esiste una distanza massima cui può arrivare il proietto assegnata la velocità, e cioè $x_{\max} = v_0^2/g$ e questa distanza massima viene raggiunta per inclinazione di 45° . Questo fatto è modificato dalla presenza dell'attrito dell'aria - aria più rarefatta ad alta quota può favorire le traiettorie con $\alpha > \frac{1}{2}\pi$. La massa del proietto, in assenza dell'attrito dell'aria, non ha influenza sul moto. Se invece teniamo conto dell'attrito aerodinamico nella forma $F_{\text{aria}} = -\eta \vec{v}$, le equazioni del moto sono risolubili in quanto lineari a coefficienti costanti. Tuttavia se si vuole risparmiare la fatica della soluzione dell'equazione differenziale si può utilizzare il codice `gun.m` che si trova su [dropbox/Esercizi/matlab](#). ■

Esercizio 2. Ricavare il valore di $G_N M_\odot$ del prodotto della costante di Newton per la massa del Sole dal fatto che la Terra compie un intero giro intorno al Sole in un periodo di rivoluzione $T \approx 365.25$ giorni e che il raggio medio dell'orbita terrestre vale 149.6 milioni di km.

Soluzione. La relazione da utilizzare è quella che lega l'accelerazione centripeta per il moto circolare (trascuriamo l'eccentricità dell'orbita) v^2/R alla forza di attrazione del Sole $G_N M_\odot M_\oplus / R^2$, ossia

$$G_N M_\odot = v^2 R.$$

La velocità è ovviamente $v = 2\pi R/T$. Inserendo i valori numerici ($1d = 24 \times 3600s$) si ricava

$$G_N M_\odot \approx 1.372 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Utilizzando i dati per G_N e $M_\odot$ dalle tabelle PDG verificare l'accuratezza del risultato. Si troverà una discrepanza dovuta al fatto che bisogna utilizzare il valore più accurato $T = 365.257d$ e inoltre l'orbita non è perfettamente circolare. ■

Esercizio 3. Come l'esercizio precedente, ma nel caso della Terra: ricavare il valore di $G_N M_\oplus$ dal fatto che la Luna compie una rivoluzione intorno alla terra in un tempo medio $T = 27.3217d$ alla distanza media $R = 384.400 \text{ km}$. Calcolare i) l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre in base ai dati disponibili e ii) il rapporto tra la massa della Terra e la massa del Sole.

Soluzione. Secondo la linea di soluzione precedente, si ottiene

$$G_N M_\oplus = v^2 R \approx 4.02 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

Se ne può dedurre il rapporto tra la massa del Sole e quella della Terra:

$$M_\odot / M_\oplus \approx 1.37 \times 10^{20} / 4 \times 10^{14} \approx 3.3 \times 10^5.$$

Inoltre dal valore di $G_N M_\oplus$ e dal raggio medio della Terra ($R_\oplus \approx 6.378 \times 10^6 \text{ m}$) si ottiene l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre:

$$G_N M_\oplus / R_\oplus^2 = 4.02 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} / (6.378 \times 10^6)^2 \text{ m}^2 \approx 9.798 \text{ m s}^{-2}$$

Si può calcolare g anche come fece Newton: l'accelerazione della Luna si calcola da

$$a_{\text{luna}} = v^2 / R = (2\pi R / T)^2 / R = 4\pi^2 \times R / T^2 = 4\pi^2 \times 384400 \text{ km} / (27.322 \times 24 \times 3600 \text{ s})^2 = 2.723 \times 10^{-6} \text{ km s}^{-2}$$

. L'accelerazione sulla Terra sta in proporzione $(R/R_\oplus)^2$, dunque

$$g = (R/R_\oplus)^2 \times a_{\text{luna}} \approx 9.89 \text{ m s}^{-2}.$$

La discrepanza con il valore corretto è da addebitare al fatto che il raggio dell'orbita lunare è solo un valore medio e l'orbita è molto deformata rispetto a una circonferenza. ■

Esercizio 4. Un punto sulla superficie terrestre è individuato da due angoli, ϑ detta latitudine e φ , la longitudine. La latitudine misura la distanza angolare dall'equatore, la longitudine la distanza angolare del meridiano che passa per il punto in questione dal meridiano di Greenwich. Determinare le componenti del vettore $\vec{r}$ che va dal centro della Terra al punto (ϑ, φ) nel sistema di riferimento che ha l'asse z lungo l'asse terrestre e l'asse x nella direzione del meridiano di Greenwich. Come mostra la cinematica del corpo rigido, la velocità di ogni punto sulla Terra rispetto a un sistema inerziale orientato secondo le stelle fisse è data da $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$, dove $\vec{r}$ è il vettore di posizione considerato prima e $\vec{\omega}$ è un vettore diretto secondo l'asse di rotazione terrestre nella direzione del polo nord e con lunghezza pari a $2\pi/T$ essendo T il periodo di rotazione (giorno) terrestre. $\vec{\omega}$ è detto il vettore velocità angolare. Calcolare la velocità del punto di coordinate (ϑ, φ) .

Soluzione. In base alla geometria solida, il vettore ha componente z pari a $R \sin \vartheta$, e le componenti x, y rispettivamente pari a $(R \cos \vartheta \cos \varphi, R \cos \vartheta \sin \varphi)$, essendo $R = 6.378 \text{ km}$ il raggio della Terra, considerando la superficie terrestre perfettamente sferica. La velocità si ottiene attraverso il prodotto vettore, ossia:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R \cos \vartheta \cos \varphi & R \cos \vartheta \sin \varphi & R \sin \vartheta \end{vmatrix} = -\mathbf{i} R \omega \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{j} R \omega \cos \vartheta \cos \varphi$$

La velocità è dunque nel piano che contiene il parallelo in direzione antioraria e il modulo della velocità all'equatore è dato da

$$v = R\omega = 6.378 \times 10^6 \times \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ ms}^{-1} \approx 463.8 \text{ ms}^{-1} = 1670 \text{ km/h}$$

e deve essere moltiplicato per $\cos \vartheta$ alla latitudine ϑ . Non c'è da stupirsi dunque se gli oppositori di Galileo obiettarono che una velocità così alta avrebbe dovuto essere facilmente percepita! ■

Esercizio 5. Si dimostri, utilizzando eventualmente un esempio, che per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa, cioè che in generale

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Soluzione. Un esempio si trova immediatamente scegliendo due vettori paralleli, diciamo $\vec{u}$ e $\vec{v}$. In tal caso

$$(\vec{u} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{w} = 0$$

mentre in generale

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) \neq 0$$

La ragione più profonda si scopre calcolando esplicitamente il *doppio prodotto vettore*

$$\vec{t} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}.$$

Si può ragionare così: il vettore $\vec{t}$ giace nel piano individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$, infatti deve essere ortogonale al vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Si potrà dunque concludere che devono esistere due funzioni I e J tali che

$$\vec{t} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = I(\vec{u}, \vec{w})\vec{v} + J(\vec{v}, \vec{w})\vec{u}$$

Tuttavia, scambiando i due primi vettori il risultato deve cambiare segno, perciò

$$\vec{t} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = I(\vec{u}, \vec{w})\vec{v} - I(\vec{v}, \vec{w})\vec{u}$$

Inoltre $\vec{t}$ deve essere ortogonale a $\vec{w}$, da cui segue

$$I(\vec{u}, \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{w}) = I(\vec{v}, \vec{w})(\vec{u} \cdot \vec{w})$$

Dato che la funzione I per costruzione deve dipendere linearmente dalle componenti di ciascun vettore di cui è funzione e inoltre essa deve essere **invariante per rotazioni** l'unica possibilità

è data da $I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. La costante λ si determina subito scegliendo ad es. $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Si ottiene così

$$\boxed{(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \wedge \vec{\mathbf{w}} = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}) \vec{\mathbf{v}} - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}) \vec{\mathbf{u}}}$$

È chiaro che al contrario il vettore $\vec{\mathbf{u}} \wedge (\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}})$ giace nel piano individuato da $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ e dunque in generale non può coincidere con $\vec{\mathbf{t}}$. ■

Esercizio 6. Dimostrare che il prodotto vettoriale si può rappresentare nella forma matriciale (talvolta di utile applicazione):

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove si intende che la matrice sia applicata alla rappresentazione del vettore come colonna:

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Si ha

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

■

Esercizio 7. Applicare il risultato precedente al calcolo del doppio prodotto vettoriale.

Soluzione. Si tratta di calcolare il prodotto di matrici $\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \wedge$ applicato al vettore $\vec{\mathbf{c}}$. Si trova

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 - \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 - \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 - \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - c_1(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \\ b_2(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - c_2(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \\ b_3(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - c_3(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \end{pmatrix} \\ &= \vec{\mathbf{b}} (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}} (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

E se volessimo calcolare $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge \vec{\mathbf{c}}$? Possiamo moltiplicare tra loro le due matrici associate a $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$? Un momento, ma il prodotto tra matrici è **associativo**, quindi non può funzionare così! Il punto è che il prodotto delle due matrici associate ai vettori $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$, come si vede dal fatto che non è una matrice antisimmetrica, **NON** è la matrice associata al prodotto vettore $\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}$, quindi la mappatura del prodotto vettore sul prodotto di matrici vale solo per la precisa associazione $\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}})$. Consapevoli di questo fatto, ciò non impedisce di utilizzare questo strumento, ad es. in `Matlab`, per codificare il prodotto vettoriale. ■

Esercizio 8. Siano $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ tre vettori che non giacciono nello stesso piano. Una volta definito $\mathcal{V} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}$, si definiscano i tre nuovi vettori

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}} / \mathcal{V}, \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{a}} / \mathcal{V}, \quad \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} / \mathcal{V}$$

Calcolare i prodotti scalari $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{U}}$ dove $\mathbf{u}$ sta per $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e $\mathbf{U}$ sta per $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Soluzione. Consideriamo il prodotto di $\vec{a}$ con gli altri vettori:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{A} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} / \mathcal{V} = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{B} &= \vec{a} \cdot \vec{c} \wedge \vec{a} / \mathcal{V} = \vec{c} \wedge \vec{a} \cdot \vec{a} / \mathcal{V} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{C} &= \vec{a} \cdot \vec{a} \wedge \vec{b} / \mathcal{V} = \vec{a} \wedge \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\end{aligned}$$

Per $\vec{b}$ e $\vec{c}$ valgono formula analoghe, cioè ogni vettore “minuscolo” è ortogonale ai vettori maiuscoli con lettera diversa e ha prodotto scalare uguale a uno con il vettore “maiuscolo” contraddistinto dalla stessa lettera. I tre vettori non complanari formano una base di riferimento; i vettori “maiuscoli” si dicono la *base duale*. ■

Dinamica–Meccanica celeste.

Esercizio 9. *Un satellite artificiale utilizzato per telecomunicazioni compie un’orbita equatoriale in un tempo di 24^h precise. Si dice che il satellite è “geostazionario”, in quanto appare all’osservatore terrestre come fisso nel cielo. Si chiede: qual’è il raggio dell’orbita? Qual’è la velocità con cui il satellite deve essere messo in orbita?*

#Abbiamo già osservato in un esercizio precedente che la Luna compie una rivoluzione intorno alla terra in un tempo medio $T = 27.3217\text{d}$ alla distanza media $R_{\text{Luna}} = 384.400\text{km}$. Ora sappiamo dalla III legge di Keplero che i raggi (R) delle orbite attorno allo stesso centro attrattore stanno ai periodi di rivoluzione T secondo la proporzione

$$R^3/T^2 = \text{costante}$$

Da qui possiamo calcolare la proporzione tra il raggio dell’orbita del satellite geostazionario e la distanza della Luna dalla Terra

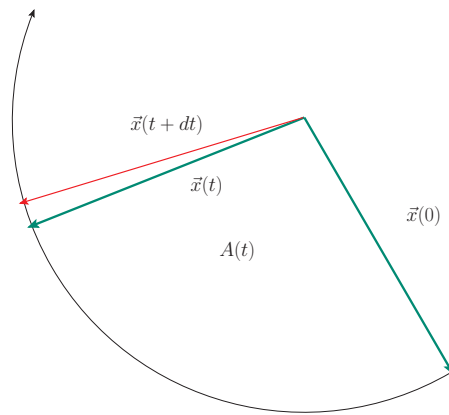
$$R_{\text{geo}}/R_{\text{Luna}} = (1/27.3217)^{2/3} = .11024$$

In conclusione $R_{\text{geo}} = 384.400\text{km} \cdot .11024 = 42.375\text{km}$. La velocità orbitale è ovviamente $v = 2\pi R_{\text{geo}}/24 \text{ km/h} \approx 11094 \text{ km/h}$. ■

Esercizio 10. *Apollo 11 compì diversi giri completi intorno alla Luna a un raggio $R \approx 2000\text{km}$ con un periodo orbitale di 2.22^h. Qual’è il rapporto tra la massa della Terra e quella della Luna? (Un ottimo articolo su Wikipedia raccoglie molte informazioni sulla natura fisica della Luna: <http://en.wikipedia.org/wiki/Moon>).*

Esercizio 11. *Considerare il momento angolare di un pianeta rispetto al sistema di riferimento del Sole (origine nel centro del Sole e direzione degli assi fissata rispetto alle stelle fisse). Se consideriamo presente un solo pianeta, il suo momento angolare non varia nel tempo, ossia $\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x} \wedge \vec{v} = 0$. Se orientiamo l’asse z nella direzione del momento angolare, si ha $\vec{M} = \{0, 0, x v_y - y v_x\}$. Dimostrare che la conservazione nel tempo di M equivale alla legge di Keplero secondo cui la “velocità areolare di ogni pianeta è costante”.*

Soluzione. Dobbiamo specificare che cos’è la “vel. areol.”? Indichiamo con $A(t)$ l’area della regione di piano compresa tra il raggio vettore al tempo iniziale $\vec{x}(0)$, il raggio al tempo t e la porzione di traiettoria descritta tra 0 e t .



L'area $A(t)$ si può esprimere attraverso l'integrale

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \frac{d\varphi}{dt} dt$$

dove φ è l'angolo compreso tra $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(t)$. (La funzione misura l'area di un triangolo che ha altezza r e base $r d\varphi$.) La quantità $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ è detta “velocità areolare” in quanto rappresenta la velocità di variazione dell'area $A(t)$. Ora è possibile esprimere x e y in funzione del raggio e dell'angolo:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

per cui anche il momento angolare si può mettere nella forma

$$\begin{aligned} M &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r \cos \varphi \left(\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) - r \sin \varphi \left(\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= r^2 \frac{d\varphi}{dt} . \end{aligned}$$

Si vede perciò che la seconda legge di Keplero altro non è che la conservazione del momento angolare. Notate che la costanza nel tempo del momento angolare è solo una proprietà approssimata del moto dei pianeti, in quanto varrebbe esattamente solo se l'unica forza fosse l'attrazione del Sole. ■

Esercizio 12. L'attrito aerodinamico in un certo regime, al di sopra di una velocità V_0 , diventa proporzionale al quadrato della velocità $F = -\mu v^2$. Nel caso di una discesa su una pista ghiacciata di inclinazione α l'equazione del moto è pertanto

$$m \frac{dv}{dt} = m g \sin \alpha - \mu v^2 .$$

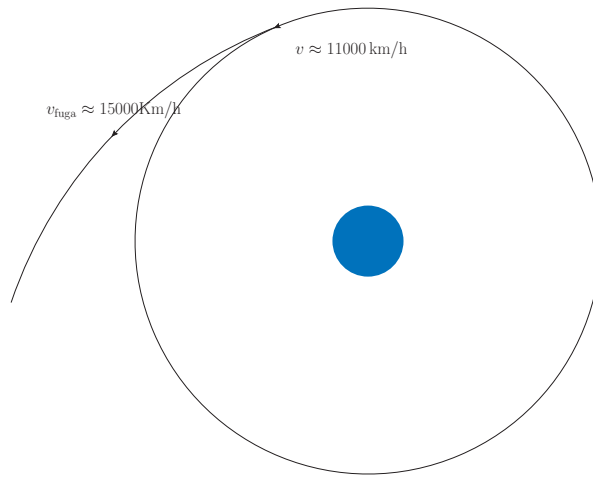
Calcolare la velocità limite.

Soluzione. Non è necessario risolvere l'equazione differenziale! La velocità limite coincide con il valore di v per cui si annulla il membro di destra dell'equazione:

$$m \frac{dv}{dt} = m g \sin \alpha - \mu v^2 = 0$$

da cui $v_{\text{limite}} = \sqrt{mg \sin \alpha / \mu}$. ■

Esercizio 13. Un satellite artificiale è in orbita circolare intorno alla terra ad una distanza $R = 4.2375 \times 10^4$ Km. Calcolare la sua velocità orbitale e il periodo dell'orbita. Determinare inoltre a quale velocità si deve accelerare il satellite per sottrarlo alla gravità terrestre e permettergli quindi di allontanarsi indefinitamente.



Soluzione. Per un'orbita circolare si ha che la forza centripeta $\frac{mv^2}{R}$ è fornita dall'attrazione della Terra $G_N M_\oplus m/R^2$, dunque $v^2 = G_N M_\oplus / R$. Chiediamoci quale deve essere la velocità in modo che l'energia totale sia zero. Infatti perchè il satellite si allontani a distanza grande a piacere si deve avere $E \geq G_N M_\oplus m/R \rightarrow 0$, cioè energia positiva. Allora

$$\frac{1}{2}mv^2 - G_N M_\oplus m/R \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 2G_N M_\oplus / R$$

e cioè la velocità deve crescere per un fattore almeno $\sqrt{2}$ rispetto a quella orbitale. Nel caso in esame il satellite è geostazionario, cioè il periodo di rivoluzione è esattamente di 24 ore ($R = 42375 \text{ Km}$) e si trova $v = \sqrt{G_N M_\oplus / R} \approx 11094 \text{ Km/h}$ e per sfuggire alla gravità della terra occorre accelerare a $v_{\text{fuga}} \approx 15642 \text{ Km/h}$. ■

Esercizio 14. Per l'orbita di un pianeta si definisce l'eccentricità in termini della distanza minima (perielio) $r_<$ e della distanza massima (afelio) $r_>$. Si ha precisamente

$$\varepsilon = \frac{r_> - r_<}{r_> + r_<}.$$

Assegnata l'energia E e il momento angolare totale L^2 , ottenere i valori di $r_<$ e $r_>$ e infine dell'eccentricità, tenendo conto che vale la relazione per l'energia totale

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{G_N M_\oplus m}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Soluzione. Afelio e perielio sono caratterizzati da $\frac{dr}{dt} = 0$ dunque sono dati dalle due radici dell'equazione

$$\frac{G_N M_\oplus m}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} + E = 0$$

ovvero

$$E r^2 + G_N M_\oplus m r - \frac{L^2}{2m} = 0$$

Si trova perciò

$$\begin{aligned} r_> + r_- &= -\frac{G_N M_\oplus m}{E} \\ r_> - r_- &= -\sqrt{(G_N M_\oplus m)^2 + 2EL^2/m}/E \\ \varepsilon = \frac{r_> - r_<}{r_> + r_<} &= -\frac{\sqrt{(G_N M_\oplus m)^2 + 2EL^2/m}/E}{-G_N M_\oplus m/E} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3 M_\oplus^2 G_N^2}} \end{aligned}$$

Esercizio 15. Tenendo conto dei risultati dell'esercizio precedente, calcolare qual'è la velocità a cui bisogna decelerare un satellite geostazionario in modo che l'orbita diventi quella di rientro (cioè da $r_> = 42375 \text{ Km}$ il satellite deve scendere a $r_< \approx 6378 \text{ Km}$. Prima di arrivare al perielio, naturalmente, l'orbita verrà a risentire fortemente dell'attrito con l'atmosfera e la Space Shuttle dovrà modificare assetto e velocità per evitare il disastro.

Esercizio 16. Si dimostri che per qualunque orbita di un satellite intorno alla Terra vale la relazione

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{r_< v_<^2}{G_N M_\oplus} \right|$$

essendo ε l'eccentricità dell'orbita, $r_<$ la minima distanza dalla Terra (perielio) e $v_<$ la velocità del satellite al perielio.

Soluzione. Si può partire dalla relazione che dà l'energia totale in termini del momento angolare totale:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{G_N M_\oplus m}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Perielio e afelio coincidono per definizione con i due punti in cui $dr/dt = 0$. Di conseguenza perielio (indicato con $r_<$) e afelio ($r_>$) sono dati dalle due radici dell'equazione

$$2mE r^2 + 2G_N M_\oplus m^2 r - L^2 = 0.$$

Si trova come prima che l'eccentricità è data da

$$\varepsilon = \frac{r_> - r_<}{r_> + r_<} = \sqrt{1 + \frac{2E L^2}{(G_N M_\oplus m)^2 m}}.$$

Adesso però conviene esprimere E e L^2 in termini della posizione e velocità al perielio: $L^2 = m^2 r_<^2 v_<^2$, $E = \frac{1}{2} m v_<^2 - G_N M_\oplus m / r_<$. Inserendo questi valori nella formula per l'eccentricità si trova il risultato. Da questa semplice formula si deduce che per l'orbita circolare bisogna dare al satellite una velocità pari a $\sqrt{G_N M_\oplus / r_<}$, mentre la velocità di fuga è quella per cui l'eccentricità raggiunge il valore 1 e quindi $\sqrt{2G_N M_\oplus / r_<}$, indipendentemente dalla massa del satellite. Notare che l'espressione dell'eccentricità in funzione dei dati al perielio può essere modificata per utilizzare quelli al perielio: dimostrare che si ha

$$\varepsilon = 1 - \frac{r_< v_<^2}{G_N M_\oplus} = \frac{r_> v_>^2}{G_N M_\oplus} - 1.$$

A questo punto, se avete risolto tutti gli esercizi finora, potete specializzarvi in navigazione inter-planetaria.

Dinamica—sulla Terra!

Esercizio 17. Si studi il moto di un doppio pendolo piano, cioè di due masse legate la prima a un supporto rigido tramite una barra rigida di cui si possa trascurare la massa e la seconda connessa alla prima massa da un giunto snodabile, come indicato in figura:

Soluzione. Il moto oscillatorio è dato dalla combinazione della forza peso che agisce sulle due masse e delle reazioni vincolari che agiscono attraverso le due barre rigide. Il calcolo diretto che tiene conto delle reazioni vincolari è alquanto complesso. La scorciatoia fornita dalle equazioni di Lagrange è del tutto elementare. La prima massa ha posizione ($x_1 = \ell_1 \sin \vartheta_1, z_1 = -\ell_1 \cos \vartheta_1$) mentre la seconda massa ha coordinate

$$x_2 = x_1 + \ell_2 \sin \vartheta_2, \quad z_2 = z_1 - \ell_2 \cos \vartheta_2$$

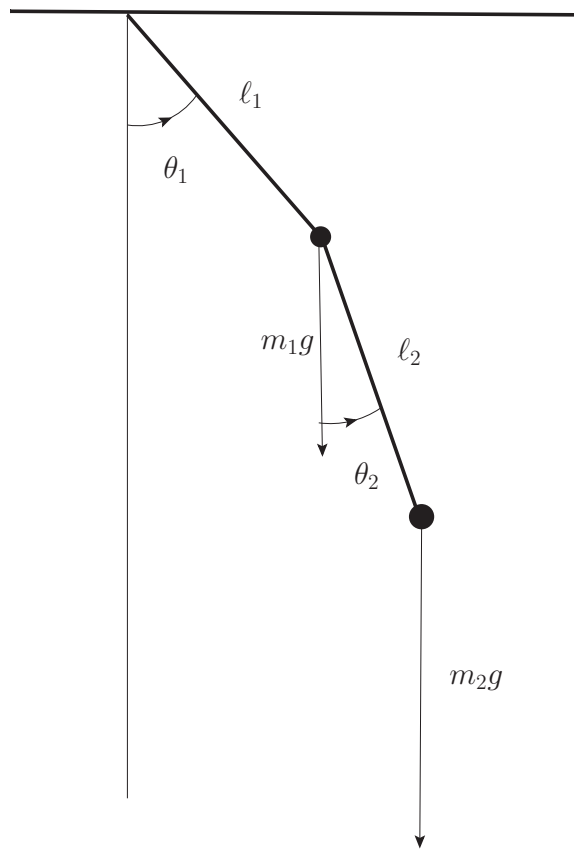


FIGURE 2. Doppio pendolo

Utilizzando la notazione $\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$ si trova

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \ell_1 \cos \vartheta_1 \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \ell_2 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{z}_1 &= \ell_1 \sin \vartheta_1 \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{z}_2 &= \dot{z}_1 + \ell_2 \sin \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2\end{aligned}$$

e quindi l'energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \ell_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2$$

e l'energia potenziale sarà

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = -(m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \vartheta_1 - m_2 g \ell_2 \cos \vartheta_2$$

Nell'approssimazione di piccoli angoli di oscillazione possiamo approssimare $\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \approx 1$ in K e $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ nell'energia potenziale. In definitiva

$$L = K - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \ell_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g \ell_1 \vartheta_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g \ell_2 \vartheta_2^2 + \text{costante}$$

Le equazioni del moto si scrivono prendendo

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta_i}}$$

per $i = 1, 2$. Troviamo così

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\vartheta}_2 &= -(m_1 + m_2) g \ell_1 \vartheta_1 \\ m_2 \ell_2^2 \ddot{\vartheta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\vartheta}_1 &= -m_2 g \ell_2 \vartheta_2 \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto alle derivate seconde otteniamo il sistema di equazioni lineari omogenee

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_1 &= \frac{g}{\ell_1 m_1} (-(m_1 + m_2) \vartheta_1 + m_2 \vartheta_2) \\ \ddot{\vartheta}_2 &= \frac{g(m_1 + m_2)}{\ell_2 m_1} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \end{aligned}$$

Ci si chiede: esistono soluzioni periodiche del tipo

$$\vartheta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1), \quad \vartheta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

oppure, più semplicemente

$$\vartheta_1(t) = A_1 \exp(i\omega t), \quad \vartheta_2(t) = A_2 \exp(i\omega t)$$

dove eventuali sfasamenti sono riassorbiti nelle costanti A_1, A_2 che possono essere a valori complessi. Si intende che alla fine di tutto si intende che la soluzione sarà data dalla parte reale dell'espressione precedente. Basta sostituire nell'equazione e si ottiene

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_1 &= \frac{g}{\ell_1 m_1} (-(m_1 + m_2) A_1 + m_2 A_2) \\ -\omega^2 A_2 &= \frac{g(m_1 + m_2)}{\ell_2 m_1} (A_1 - A_2) \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo che ammette soluzione non nulla solo se il determinante del sistema si annulla. La condizione è perciò

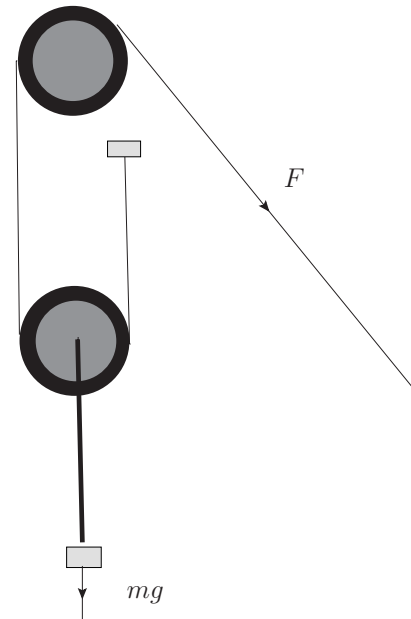
$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{g(m_1 + m_2)}{\ell_1 m_1} & \frac{gm_2}{\ell_1 m_1} \\ \frac{g(m_1 + m_2)}{\ell_2 m_1} & \omega^2 - \frac{g(m_1 + m_2)}{\ell_2 m_1} \end{vmatrix} = 0$$

In conclusione ci sono due modi periodici corrispondenti alle radici dell'equazione precedente. Questi vengono denominati “modi normali” del sistema. Ogni altro modo di oscillazione è dato da una sovrapposizione lineare di questi due e pertanto è un moto quasi-periodico in quanto le due frequenze sono in generale non commensurabili. Ricavare per esercizio l'espressione esplicita delle due frequenze proprie. (Per lunghezze e masse uguali si trova $\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{g/\ell}$, $\omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{g/\ell}$). ■

Esercizio 18. Considerare il sistema di carrucole della figura seguente. Quanto deve valere la forza F perchè il sistema sia in equilibrio?

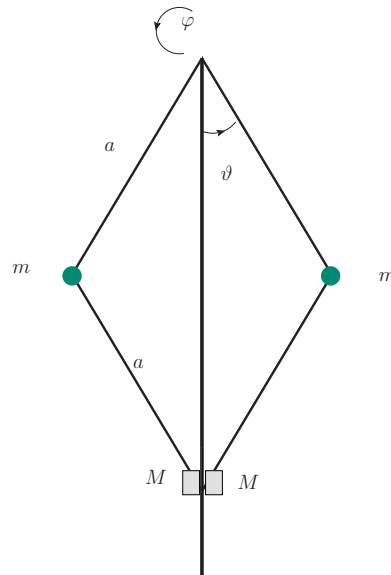
Soluzione. Si può fare riferimento al lavoro delle forze. Per uno spostamento Δ del punto di attacco della forza F il lavoro compiuto sarà $F\Delta$. Il lavoro va ad aumentare l'energia potenziale della massa m che si sposta di $\Delta/2$. Dunque $F = mg/2$. Con un sistema di N carrucole lo spostamento della massa sarà N volte minore del punto di attacco della forza e quindi F può

ridursi a mg/N , al prezzo di tirare la corda molto più a lungo... L'argomento è noto come



“principio dei lavori virtuali” per la ricerca dell’equilibrio.

Esercizio 19. *Un regolatore di Watt è un dispositivo meccanico che si utilizzava per controllare la velocità di rotazione Ω di un albero mosso da un motore. Il principio è che le due masse m per via della rotazione intorno all’asse verticale vengono spinte verso l’esterno fino al punto in cui si equilibrano le forze. Le forze in gioco sono i pesi delle masse m ed M e le reazioni vincolari delle aste rigide che formano il parallelogramma; questo è libero di flettersi intorno alle cerniere cui sono attaccate le masse m mentre la massa M è costituita da un cilindro libero di scivolare senza attrito lungo l’asse. (Per curiosità si può vedere Wikipedia alla voce “Watt governor”). Determinare la posizione di equilibrio se l’asse ruota con velocità angolare $\dot{\phi} = \Omega$*



assegnata.

Soluzione. Il metodo di Lagrange offre la soluzione con il minimo sforzo e senza che dobbiamo occuparci delle reazioni vincolari. La velocità delle masse m è data da $a \sin \vartheta \dot{\phi}$ cioè dal prodotto della velocità angolare per la distanza dall’asse di rotazione. La massa M è a una quota $z = -2a \cos \vartheta$ e ad essa dunque è associata una energia cinetica $\frac{1}{2} M 4a^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2$. Le due masse m

hanno coordinate sferiche ($r = a, \vartheta, \varphi$); sappiamo che la velocità è in generale $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$, ma $r = a$ è costante e $\dot{\varphi} = \Omega$ è pure costante. Dunque a ciascuna delle due masse m corrisponde un'energia cinetica $\frac{1}{2} m a^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \Omega^2)$. Infine la loro energia potenziale è semplicemente $-m a g \cos \vartheta$. Mettendo tutto insieme si trova

$$L = a^2 (m + 2M \sin^2 \vartheta) \dot{\vartheta}^2 + m a^2 \Omega^2 \sin^2 \vartheta + 2 a g (M + m) \cos \vartheta$$

L'equazione di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta}$ implica che se si è all'equilibrio e perciò $\dot{\vartheta} = 0$ deve essere $\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$. Questa condizione è facile da ricavare:

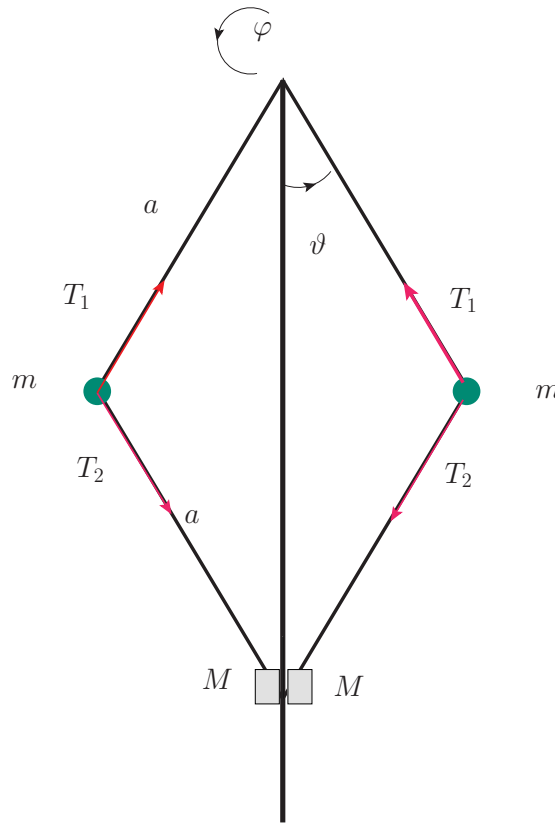
$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m a^2 \Omega^2 \times 2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 a g (M + m) \sin \vartheta = 0$$

ossia

$$(1) \quad \boxed{\cos \vartheta = \frac{(M + m) g}{m a \Omega^2}} .$$

Se si vuole imporre un limite secondo cui la velocità angolare non deve superare il valore $\Omega_{\max}$ si metterà un controllo che scatta quando la quota della massa M raggiunge il valore

$$z = -2 a \cos \vartheta = 2 \frac{(M + m) g}{m \Omega_{\max}^2}$$



Per persuaderci che il calcolo fatto con il metodo di Lagrange è davvero corretto, analizziamo il bilancio delle forze in equilibrio. Su ciascuna massa m agisce il peso $m g$ e le due tensioni vincolari T_1 e T_2 : la risultante deve fornire la forza centripeta $m R \Omega^2$ dove $R = a \sin \vartheta$ è la

distanza di m dall'asse di rotazione. Inoltre sulla massa M agiscono la forza peso Mg e le due tensioni uguali T_2 . Dunque si avrà

$$(2) \quad (T_1 + T_2) \sin \vartheta = m a \sin \vartheta \Omega^2$$

$$(3) \quad (T_1 - T_2) \cos \vartheta = mg$$

$$(4) \quad 2T_2 \cos \vartheta = Mg$$

Da qui segue $T_2 \cos \vartheta = \frac{1}{2}Mg$, $T_1 \cos \vartheta = (m + \frac{1}{2}M)g$ e infine

$$m a \Omega^2 = (T_1 + T_2) = (m + M) g / \cos \vartheta$$

esattamente come ottenuto con il metodo di Lagrange. Consiglio: verificare la consistenza dell'ultima equazione dal punto di vista dimensionale. Ogni tanto conviene farlo, così ho trovato spesso delle sviste nelle formule o anche dei veri e propri errori.

Un'osservazione importante: nel ricavare il risultato abbiamo ignorato un'altra posizione di equilibrio: $\vartheta = 0$! Questa è in effetti contenuta nelle formula precedenti e l'abbiamo trascurata quando abbiamo eliminato $\sin \vartheta$ nell'equazione Eq. (??). Inoltre dal risultato dell'Eq. (??) si vede che per avere una posizione di equilibrio con un'apertura $\vartheta > 0$ è necessario che Ω^2 sia almeno pari a $\Omega_{\min} = \sqrt{(M + m)g/(ma)}$ dato che il coseno ha valori minori di uno. Quindi per velocità angolari inferiori a questo valore la posizione di equilibrio è ad angolo nullo, poi *questa posizione diviene instabile*. Studiando il moto secondo la Lagrangiana e aggiungendo l'attrito si trovano traiettorie del tipo illustrato qui di seguito. Se non ci fosse attrito il regolatore non potrebbe funzionare in modo affidabile. (Codice: *Watt.m*).

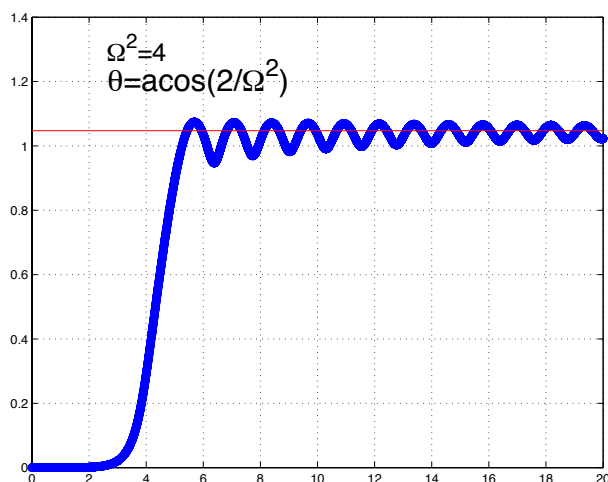
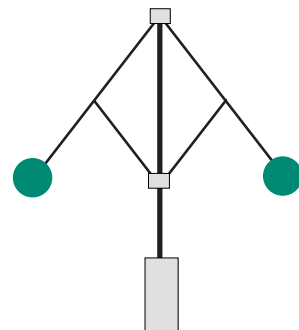


FIGURE 3. Regolatore di Watt: in ascissa il tempo e in ordinate l'angolo ϑ , parametri $m = M = g = 1$.



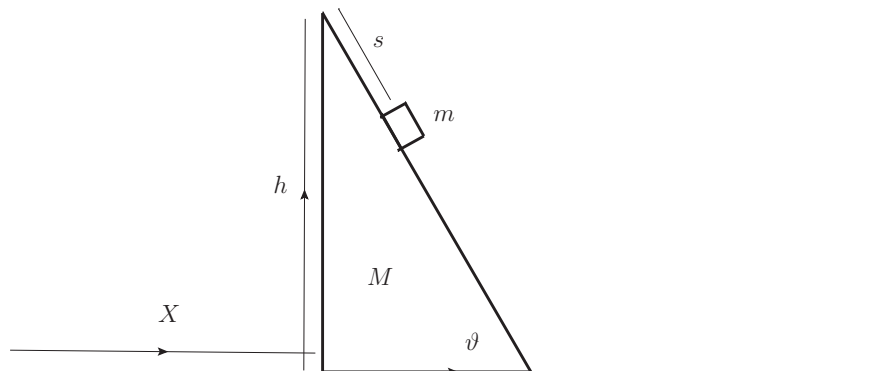
Studiare il problema utilizzando la geometria della figura seguente, introducendo i parametri necessari per caratterizzare il sistema (al solito si consideri, nonostante

le apparenze, puntiformi le masse sospese e di massa trascurabile tutte le componenti tranne le “flyballs” e il cilindro di appoggio). ■

Esercizio 20. *Trattazione lagrangiana dell’esercizio “0” della Lezione 10.*

Un mattone di massa m viene posto con velocità iniziale nulla in cima a un cuneo di massa M posato su un piano orizzontale e libero di muoversi senza attrito. La discesa del mattone mette in movimento il nucleo su cui si appoggia. Si chiede di determinare la velocità del cuneo quando il mattone raggiunge il piano. Il lato del cuneo forma un angolo ϑ con il piano.

Soluzione. Indichiamo con x e z le coordinate del mattone e con X la posizione orizzontale del cuneo. Inoltre indichiamo con s la distanza dal vertice del mattone lungo il lato obliquo.



Esprimiamo tutto in funzione di X e s . Si ha

$$x = X + s \cos \vartheta, \quad z = h - s \sin \vartheta.$$

La velocità del mattone è perciò

$$v_x = \dot{X} + \dot{s} \cos \vartheta, \quad v_z = -\dot{s} \sin \vartheta.$$

L’energia cinetica è allora

$$K = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{X} + \dot{s} \cos \vartheta)^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \sin^2 \vartheta$$

mentre l’energia potenziale è $V = mgz = mg(h - s \sin \vartheta)$. Dalla Lagrangiana $L = K - V$ si ricavano le equazioni del moto relative a s

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= \frac{d}{dt} (m \cos \vartheta (\dot{X} + \dot{s} \cos \vartheta) + m \dot{s} \sin^2 \vartheta) - mg \sin \vartheta \\ &= m \cos \vartheta \ddot{X} + m \ddot{s} \cos^2 \vartheta + m \dot{s} \sin^2 \vartheta - mg \sin \vartheta \\ (5) \quad &= m \cos \vartheta \ddot{X} + m \ddot{s} - mg \sin \vartheta = 0 \end{aligned}$$

e relative a X

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = M \ddot{X} + m (\ddot{X} + \ddot{s} \cos \vartheta) = 0$$

Sottraiamo l’Eq.5 moltiplicata per $\cos \vartheta$ dalla Eq.6 e otteniamo

$$(M + m \sin^2 \vartheta) \ddot{X} = -mg \sin \vartheta \cos \vartheta$$

che ci dà l’accelerazione costante del cuneo, mentre dall’Eq.6 ricaviamo l’accelerazione del mattone $\ddot{s}$

$$\ddot{s} = \frac{M + m}{M + m \sin^2 \vartheta} g \sin \vartheta$$

Dato che l'accelerazione è costante, il moto è uniformemente accelerato e ci dà come risultato

$$s(t) = \frac{1}{2} \frac{M+m}{M+m \sin^2 \vartheta} g t^2 \sin \vartheta$$

$$X(t) = -\frac{1}{2} \frac{mg \sin \vartheta \cos \vartheta}{(M+m \cos^2 \vartheta)} t^2$$

Il mattone raggiunge il piano quando $z = h - s \sin \vartheta = 0$ e ciò corrisponde a

$$\frac{1}{2} \frac{M+m}{M+m \sin^2 \vartheta} g t_f^2 \sin^2 \vartheta = h$$

Risolvendo rispetto a t e mettendo il valore nell'espressione per $\dot{X} = -\frac{mg \sin \vartheta \cos \vartheta}{(M+m \cos^2 \vartheta)} t_f$ si ottiene

$$\dot{X}(t_f) = -\sqrt{\frac{2g m^2 h \cos^2 \vartheta}{(M+m \sin^2 \vartheta)(M+m)}}$$

che coincide (ovviamente) con il risultato della “Esercitazioni-Lezione 10”. Sta a voi decidere quale il percorso più facile!

Corpo rigido.

Esercizio 21. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni di un pendolo costituito da una sbarra rigida omogenea lunga L , massa M e spessore trascurabile e che oscilla in un piano verticale.

Soluzione. Il parametro più comodo è l'angolo φ che la sbarra forma con la verticale. La velocità angolare coincide con $\dot{\varphi}$ e ci serve solo il momento d'inerzia relativamente a un riferimento centrato nel punto di sospensione:

$$\mathcal{I} = \rho \int_0^L dz z^2 = ML^2/3$$

essendo ρ la densità lineare e $M = \rho L$. L'energia totale è perciò ottenuta sommando energia cinetica ($\frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2$) all'energia potenziale (mg per la quota del centro di massa)

$$E = \frac{1}{6} ML^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} MgL \cos \varphi$$

Per le piccole oscillazioni avremo

$$E \approx \frac{1}{6} ML^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} MgL \varphi^2$$

e la frequenza è $\omega \approx \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ ossia $\sqrt{\frac{3}{4}}$ di quella che si avrebbe se il peso fosse concentrato tutto nel baricentro. Si confronti il risultato con quello del doppio pendolo (Es. ??). ■

Esercizio 22. Calcolare i momenti di inerzia principali riferiti al sistema del centro di massa per una cilindro omogeneo di massa M , altezza h e raggio di base R .

Soluzione. Calcoliamo $\mathcal{I}_{33}$ relativo all'asse di simmetria:

$$\mathcal{I}_{33} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R r dr (x^2 + y^2) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \rho h R^4/4 = MR^2/2.$$

(infatti $x^2 + y^2 = r^2$). Per $\mathcal{I}_{11}$ e $\mathcal{I}_{22}$ sfruttiamo il fatto che il loro valore coincide per simmetria e di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{11} + \mathcal{I}_{22} &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R r dr (2z^2 + r^2) \\ &= 2\pi \frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} dz (z^2 R^2 + R^4/4) \\ &= \frac{Mh^2}{6} + \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\mathcal{I}_{33} = \frac{1}{2} M R^2, \quad \mathcal{I}_{11} = \mathcal{I}_{22} = \frac{M h^2}{12} + \frac{1}{4} M R^2$$

SI riconosce che per spessore trascurabile ($R \rightarrow 0$) riotteniamo il risultato della sbarra per la quale il momento d'inerzia relativo al sistema del centro di massa si ottiene con il teorema di Steiner:

$$\mathcal{I}_{CM} = M L^2/3 - M(L/2)^2 = M L^2/12.$$

■

Esercizio 23. *Un cilindro di raggio a rotola senza strisciare all'interno di una superficie cilindrica di raggio $L > a$. Detta M la massa del cilindro trovare la frequenza delle piccole oscillazioni.*

Soluzione. Indichiamo con φ l'angolo formato dal raggio che congiunge i centri dei due cilindri. Allora la velocità del centro di massa è $V = (L - a)\dot{\varphi}$. La velocità angolare del cilindro mobile si deduce dalla condizione di rotolamento con aderenza perfetta, e cioè $\omega a = V = (L - a)\dot{\varphi}$. L'energia cinetica sarà perciò:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M (L - a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} M a^2 \left(\frac{L - a}{a} \right)^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{3}{4} M (L - a)^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

L'energia potenziale è data in termini della quota del centro di massa, e cioè

$$V = -Mg(L - a) \cos \varphi \approx \frac{1}{2} Mg(L - a) \varphi^2 + \text{costante}$$

L'equazione del moto, utilizzando il metodo di Lagrange, risulta

$$\frac{3}{2} M (L - a)^2 \ddot{\varphi} = -Mg(L - a) \varphi$$

per cui la frequenza è data dalla relazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g}{3(L - a)}}$$

Il fattore $2/3$ è lo stesso che compare nell'accelerazione di un cilindro che rotola su un piano inclinato, come illustrato nella Lezione 9.

Esercizio 24. *Determinare l'energia cinetica di un corpo rigido omogeneo a forma di cono retto, con raggio di base R , altezza h e massa M nel caso che il cono rotoli senza strisciare su di un piano. Se il piano è inclinato formando un angolo φ con l'orizzontale, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.*

Soluzione. Il rotolamento del cono, come è familiare dall'esperienza, comporta che il vertice rimane fisso. Abbiamo bisogno di calcolare il momenti di inerzia del cono relativi agli assi principali di inerzia, di uno è l'asse di simmetria del cono e gli altri due sono ortogonali tra loro e rispetto all'asse. Pensiamo al cono con l'asse di simmetria lungo l'asse z e il vertice nell'origine delle coordinate. Calcoliamo i momenti di inerzia I'_{ii} relativi al vertice del cono:

- Centro di massa: ovviamente si trova lungo l'asse di simmetria. Dunque è sufficiente calcolare in coordinate cilindriche

$$z_{CM} = \frac{\int d^3x \, z}{\int d^3x} = \frac{\int_0^h z \, dz \int_0^{zR/h} r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^h dz \int_0^{zR/h} r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi} = \frac{3}{4} h.$$

- I'_{33} : ricordando che il volume del cono è $\frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$ e quindi $\rho = \frac{3M}{\pi h R^2}$ si deve calcolare

$$\mathcal{I}_{33} = \frac{3M}{\pi h R^2} \int_0^h dz \int_0^{zR/h} r^2 r \, dr \times 2\pi = \frac{3}{2} \frac{M}{h R^2} \left(\frac{R}{h} \right)^4 \frac{h^5}{5} = \frac{3}{10} M R^2.$$

- I'_{11} : sfruttiamo la simmetria che implica $I'_{11} = I'_{22}$. Conviene allora calcolare la somma, perchè in questo modo non entra l'angolo φ nell'integrale:

$$\begin{aligned}
 2I'_{11} = I'_{11} + I'_{22} &= \rho \int d\varphi \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} (y^2 + z^2 + x^2 + z^2) \\
 &= \frac{3M}{\pi h R^2} 2\pi \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} (2z^2 + r^2) r dr \\
 &= \frac{6M}{h R^2} \int_0^h dz \left(\left(\frac{zR}{h} \right)^2 z^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{zR}{h} \right)^4 \right) \\
 &= \frac{6M}{h R^2} \left(\frac{R^2 h^3}{5} + \frac{R^4 h}{20} \right) \\
 &= \frac{6M}{5} (R^2/4 + h^2)
 \end{aligned}$$

e infine

$$I'_{11} = I'_{22} = \frac{3M}{5} (R^2/4 + h^2)$$

Interessano i momenti di inerzia relativamente al centro di massa. $\mathcal{I}_3$ rimane inalterato, mentre I'_1 e I'_2 devono essere sottratti di $M(3h/4)^2$. Si trova così $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \frac{3}{20} M(R^2 + h^2/4)$. Ora per calcolare l'energia cinetica del cono che rotola sul piano, dobbiamo tenere conto che la velocità angolare è legata alla velocità del centro di massa da $V_{CM} = \frac{3}{4} h \sin \alpha \omega$ dove 2α è l'apertura del cono e quindi $\tan \alpha = R/h$. Dalla formula generale $E_K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mathcal{I}_{jk} \omega_j \omega_k$ si trova

$$\begin{aligned}
 E_K &= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \mathcal{I}_{33} (\omega \cos \alpha)^2 + \mathcal{I}_{11} (\omega \sin \alpha)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{3}{20} M R^2 \left(\cos \alpha \frac{4}{3h \sin \alpha} V_{CM} \right)^2 + \frac{3}{10} M (R^2/4 + h^2) \left(\sin \alpha \frac{4}{3h \sin \alpha} V_{CM} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{2}{15} M V_{CM}^2 (6 + \tan^2 \alpha)
 \end{aligned}$$

Un parametro adatto per trattare il moto del cilindro è l'angolo ϑ che la generatrice forma con una direzione fissa. Si ha ovviamente $V_{CM} = \frac{3}{4} h \cos \alpha \dot{\vartheta}$. Mettendo tutto insieme si trova

$$E_K = \frac{3}{40} M h^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha) \dot{\vartheta}^2.$$

L'energia totale avrà un contributo dal peso $-3/4 h M g \sin \varphi \cos \vartheta$ che per piccole oscillazioni fornisce l'energia totale

$$E = \frac{3}{40} M h^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha) \dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{8} M g h \sin \varphi \vartheta^2$$

Per un'energia $E = a\dot{x}^2 + bx^2$ la frequenza è $\omega = \sqrt{\frac{b}{a}}$, nel caso del cilindro

$$\omega = \sqrt{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \alpha + 1/5}} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

(ammettendo che per l'inclinazione φ l'attrito con il piano consenta al cilindro di mantenere la sua quota verticale!). ■