

Statica e dinamica dei fluidi

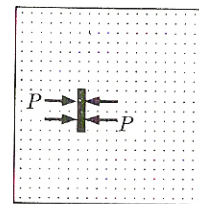
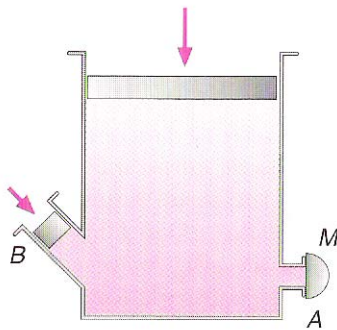
A. Palano

Fluidi perfetti

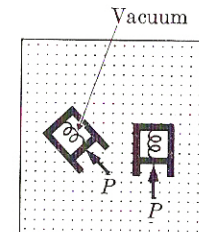
- Un fluido perfetto e' incomprimibile e indilatabile e non possiede attrito interno.
- Forza di pressione come la somma di tutte le forze di interazione delle molecole del fluido con una determinata superficie.
- La [Figura](#) mostra una particella che urta elasticamente una parete rigida. Una forza viene esercitata sulla parete.
- La pressione viene definita come:

$$P = F/S$$

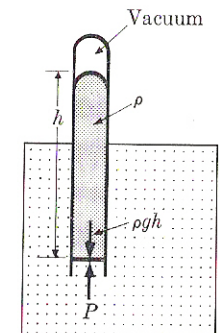
- La forza di pressione e' sempre normale alla superficie.
- In ogni punto di un fluido in quiete la pressione e' indipendente dall'orientazione.



(a)



(b)



(c)

La Pressione

- La pressione si misura in Pascal:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

- Una unita' largamente usata e' l'atmosfera:

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

- Una atmosfera e' la pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 76 cm, a 0° con un'accelerazione $g = 9.80665 \text{ m/sec}^2$

- Altre unita' di misura:

$$1 \text{ baria} = 1 \text{ dina/cm}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 10 \text{ barie}$$

$$1 \text{ bar} = 10^6 \text{ barie}$$

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm}_{Hg} = 1/760 \text{ atm}$$

Legge di Stevino

- Consideriamo un elemento di fluido in equilibrio di spessore dy e area A . Sia ρ la densita' del fluido. La massa di questo elemento e':

$$dm = \rho dV = \rho A dy$$

- Il suo peso e':

$$dm g = g \rho A dy$$

- Le forze orizzontali hanno risultante nulla in quanto la pressione e' la stessa su tutto il piano orizzontale.
- L'elemento di fluido e' in equilibrio sotto l'azione della forza peso e delle due forze di pressione.
- Quindi:

$$\Sigma F_y = pA - (p + dp)A - g \rho A dy = 0$$

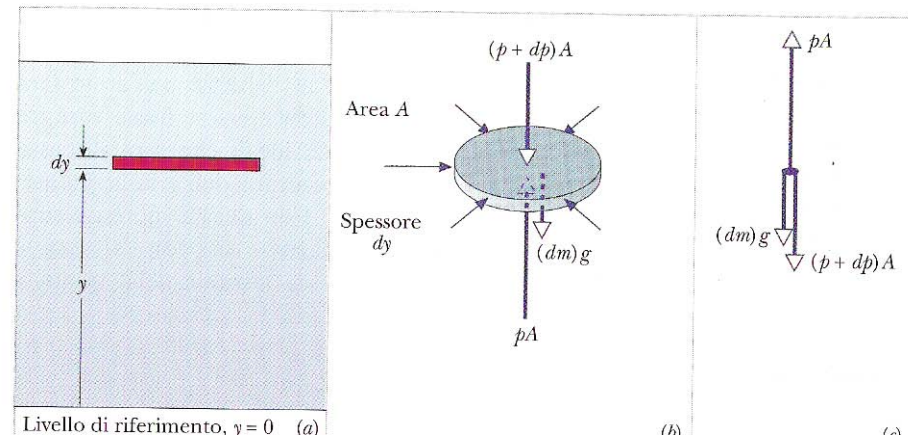
- Semplificando A , otteniamo:

$$p - p - dp - g \rho dy = -dp - g \rho dy$$

$$\frac{dp}{dy} = -g \rho \quad (1)$$

- La quantita' $\frac{g \rho}{1}$ e' detta peso specifico.
- Integrando la (1):

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$



Legge di Stevino

- Ponendo ρ e g costanti:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

- Indichiamo con p_0 la pressione alla superficie:

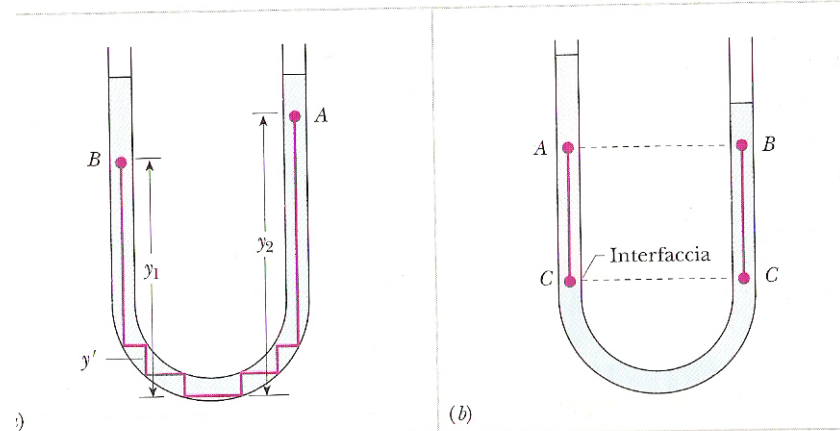
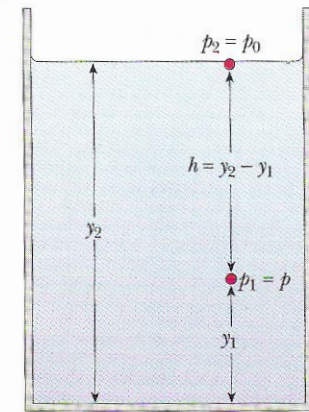
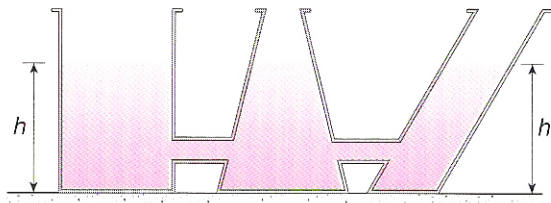
$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1)$$

- Indicando con $h = y_2 - y_1$ la profondita':

$$p = p_0 + \rho g h$$

- La pressione aumenta quindi linearmente con la profondita'.
- Legge di Stevino: la differenza di pressione fra due punti A_2 e A_1 e' data dalla pressione esercitata alla base da una colonna di fluido di altezza uguale al dislivello dei due punti.**
- Legge di Pascal: In un fluido in equilibrio la pressione e' costante in tutti i punti che si trovano alla stessa quota.**
- Principio dei vasi comunicanti: le superfici libere si trovano allo stesso livello qualunque sia la forma dei vasi.
- Se vi sono due fluidi di densita' diverse, se h_1 e h_2 sono le altezze dalla superficie di separazione, le pressioni devono essere uguali:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$



Legge di Archimede

- Consideriamo un corpo immerso in un liquido.
- Le forze di pressione sulle facce laterali sono uguali e si equilibrano.
- Sulla base inferiore vi e' una forza rivolta verso l'alto pari a $p_2 S$, sulla faccia superiore una forza verso il basso $p_1 S$. La risultante e' diretta verso l'alto:

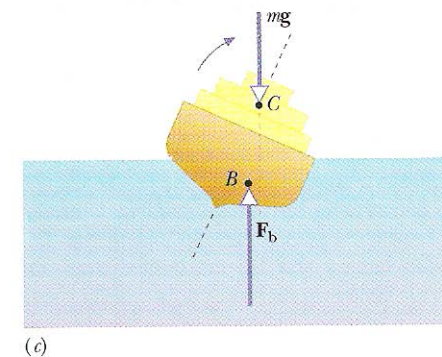
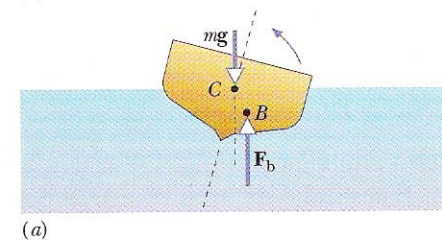
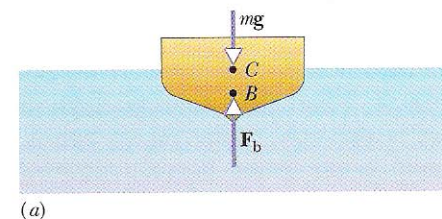
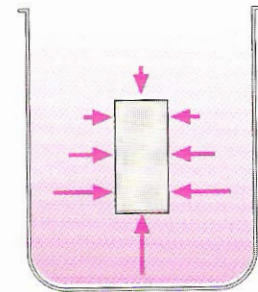
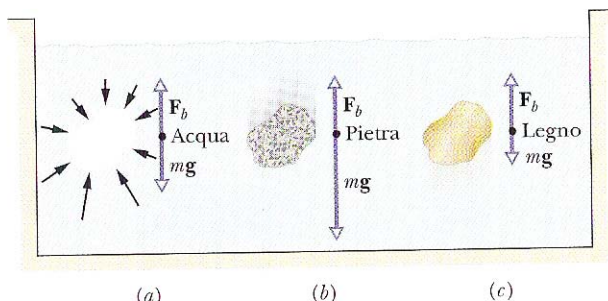
$$F = p_2 S - p_1 S = (p_2 - p_1) S = \rho g h S$$

- Se indichiamo con
- la massa del liquido spostato:

$$m_f = \rho h S$$

$$F = m_f g$$

- Cioe' la spinta verso l'alto e' pari al peso del liquido spostato.
- F e' chiamata spinta di Archimede.
- Legge di Archimede: Un fluido esercita su un corpo immerso in esso una forza verticale diretta verso l'alto pari al peso del fluido spostato.**
 - Se la densita' del corpo immerso e' inferiore a quella del fluido, questo galleggia, altrimenti sprofonda.
 - Per un corpo parzialmente immerso, il centro di spinta della forza di Archimede e' data dal centro di gravita' della parte sommersa. Sul corpo agisce un momento che puo' rovesciare la barca o riportarla in equilibrio.



Fluido in rotazione

- Un recipiente sia in rotazione attorno all'asse z con velocità angolare $\underline{\omega}$.
- Un elemento di liquido $\underline{dm}$ sia nei pressi della superficie.
- Esso è sottoposto alla forza peso

$$g dm$$

- e a una forza centrifuga:

$$\omega^2 r dm$$

- La forza totale deve essere normale alla superficie altrimenti l'elemento di liquido scorrerebbe. Quindi il lavoro fatto dalla forza lungo tale superficie è nullo.
- La superficie è quindi equipotenziale.
- Calcoliamo l'energia potenziale dovuta alla forza centrifuga.
- Se r è la distanza dall'asse, il lavoro infinitesimo è:

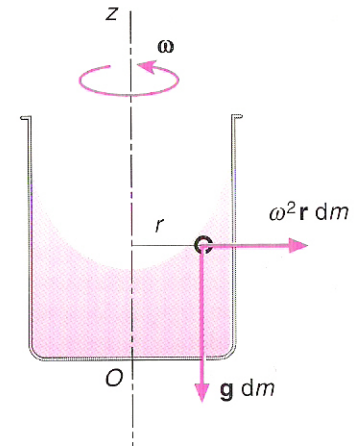
$$dL_c = \omega^2 dm r dr = -dU_c$$

- Quindi:

$$\Delta U_c = U_c(r) - U_c(0) = -\omega^2 dm \int_0^r r dr = -\omega^2 dm \frac{1}{2} r^2 \quad U_c = -\frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

- L'energia potenziale totale è quindi:

$$gz dm - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$



Fluido in rotazione

- Tale superficie e' equipotenziale quindi:

$$gzdm - \frac{1}{2}r^2\omega^2 dm = cost$$

- e infine:

$$z - \frac{\omega^2}{2g}r^2 = cost = z_0 \qquad z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

- Quindi la superficie del liquido e' rappresentata da una parabola.
- Consideriamo una particella di fluido in rotazione.
- Questa e' sottoposta ad una forza centrifuga verso l'esterno:

$$\omega^2 r \rho \Delta V$$

- e una forza di pressione verso l'interno:

$$\omega^2 r \rho_L \Delta V$$

- Se

$$\rho > \rho_L$$

- il corpicciolo viene spinto verso l'esterno, se

$$\rho < \rho_L$$

- viene spinto verso l'asse di rotazione. Centrifughe

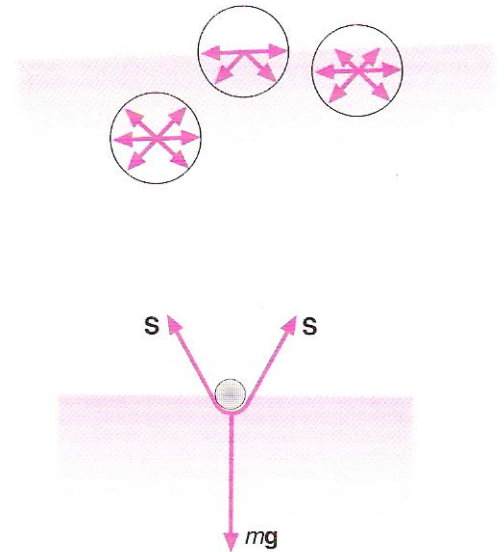
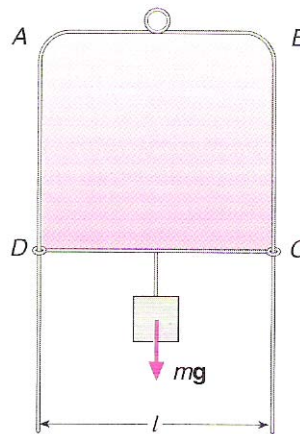
Tensione superficiale

- Forze di coesione molecolari producono effetti in cui le molecole sono attratte verso l'interno del sistema.
- Le forze risultanti producono effetti di coesione.
- Un ago può galleggiare sull'acqua a causa di tali forze.
- Fenomeni di tensione superficiale nelle zone di separazione fra due diversi materiali.
- Tensione superficiale definita come:

$$\tau = \frac{F}{l}$$

Tangente alla superficie.

Nell'esempio: $T = F/2l$ in quanto vi sono due facce.



▲ 16-1 Un ago può galleggiare sull'acqua.

Tensione superficiale.

- Il lavoro compiuto dalla forza per aumentare il volume del liquido e':

$$dL = Fdx = \tau l dx = \tau dS$$

- Quindi:

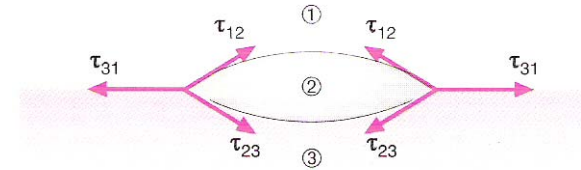
$$\tau = \frac{dL}{dS}$$

- La tensione superficiale rappresenta quindi il lavoro compiuto per aumentare la superficie della lamina liquida.

Linee di contatto

- Una goccia di liquido in equilibrio.
- La somma delle forze deve essere nulla.

$$\tau_{12} + \tau_{31} + \tau_{23} = 0$$



- Diseguaglianze triangolari:

$$\tau_{31} < \tau_{12} + \tau_{13}$$

- Nel caso dell'olio, la tensione acqua-olio supera la somma delle altre due tensioni, per cui la goccia d'olio si espande sull'acqua.

Presenza di una fase solida

- In presenza di un mezzo solido, occorre aggiungere la reazione vincolare R normale alla superficie.
- La somma delle forze deve essere nulla.

$$\mathbf{R} + \tau_{12} + \tau_{31} + \tau_{23} = 0$$

- La somma

$$\tau_{12} + \tau_{31} + \tau_{23}$$

- Deve essere perpendicolare alla parete.
- Questo si ottiene solo per un valore particolare dell'angolo di raccordo $\underline{\alpha}$.
- Quindi:

$$\tau_{31} = \tau_{23} + \tau_{12} \cos \alpha$$

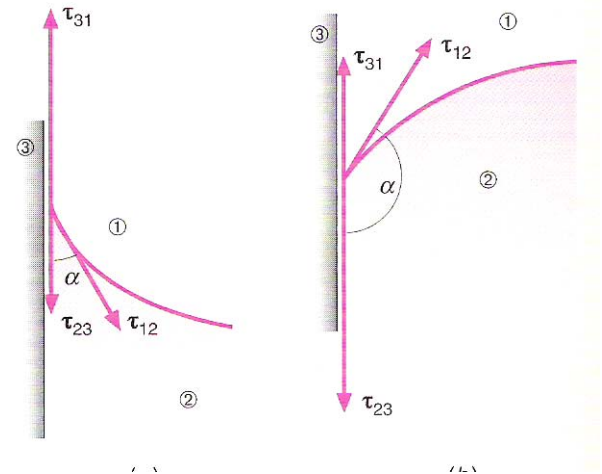
- Si deve quindi verificare che:

$$\tau_{31} > \tau_{23}$$

- Se questo non si verifica allora:

$$\alpha > \pi/2$$

- Liquido che bagna o non bagna la parete.



Legge di Borelli

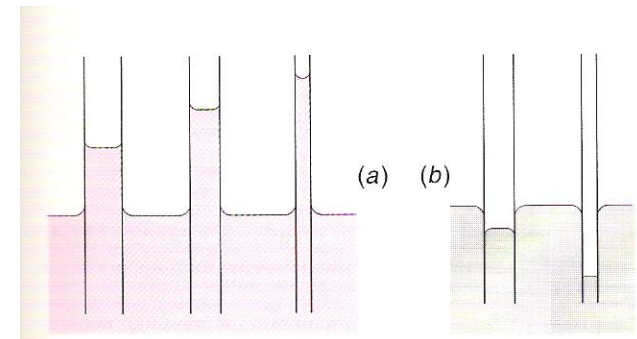
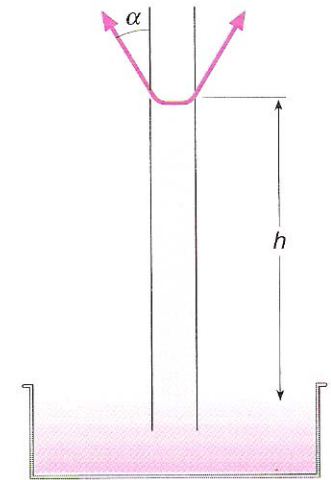
- Fenomeni capillari.
- Un capillare sia immerso in un liquido. Il livello di tale liquido nel capillare puo' essere piu' alto o piu' basso della superficie del liquido.
- Il liquido nel capillare e' in equilibrio sotto l'azione della
- Tensione superficiale e la forza peso.

$$\tau \cos \alpha 2\pi r = \rho \pi r^2 h g$$

- Ricavando h:

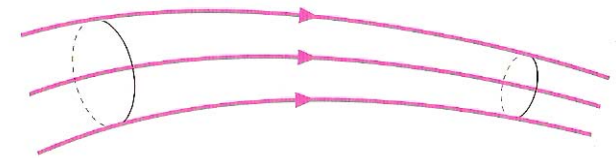
$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{r \rho g}$$

- Legge di Borelli: le differenze di livello nei tubi immersi in un liquido sono inversamente proporzionali al raggio del tubo.



Dinamica dei fluidi: equazione di continuita'

- Fluidi perfetti.
- Assenza di attrito. Fluido non viscoso. Moto laminare.
- In regime stazionario le particelle seguono le linee di corrente. In ogni punto la velocita' e' tangente alle linee di corrente.



- *Linea di flusso o linea di corrente. Tubo di flusso insieme di tutte le linee di flusso passanti per una curva chiusa.*
- Un tubo di flusso avente in due punti sezioni dS_1 e dS_2 e velocita' $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$.

- Se $\underline{\rho_1}$ e $\underline{\rho_2}$ sono le densita', nel tempo dt passa nella sezione 1 una massa di fluido: $dm_1 = \rho_1 v_1 dt dS_1$
- nel punto 2:

$$dm_2 = \rho_2 v_2 dt dS_2$$

- Se $dm_1 = dm_2$

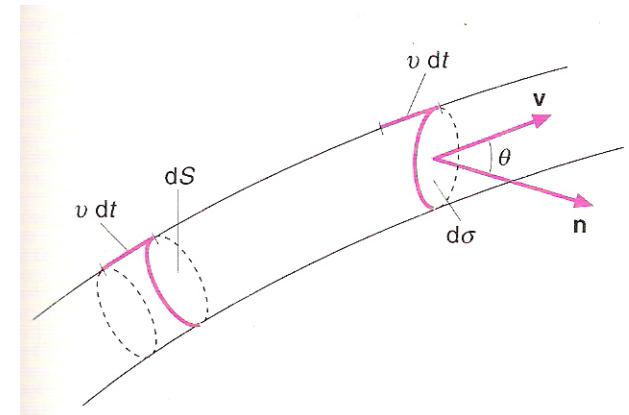
$$\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2$$

- **Equazione di continuita'.**
- Se il fluido e' incompressibile:

$$\rho_1 = \rho_2$$

$$v_1 dS_1 = v_2 dS_2$$

- La velocita' del fluido aumenta se diminuisce la sezione.



Portata

- In generale, se la velocità forma un angolo con la normale $\mathbf{n}$ alla superficie:

$$dm = \rho v \cos \theta d\sigma dt = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma dt$$

- Si definisce portata (m^3/sec):

$$dQ = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

- Per un tubo di sezione finita:

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_S v dS$$

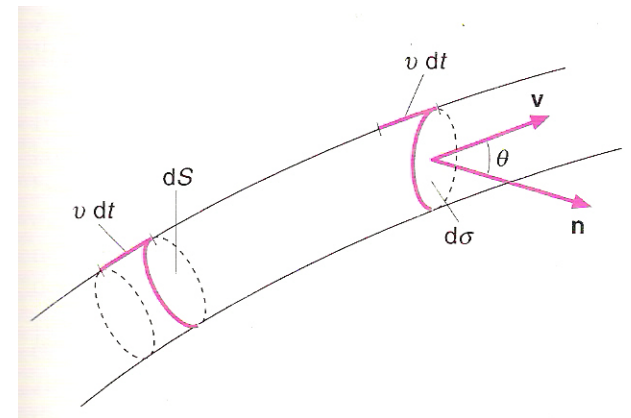
- dove S e' la superficie normale alla corrispondente linea di flusso.
- Se definiamo velocità media:

$$v_m = \frac{Q}{S}$$

- allora:

$$v_m S = \text{costante}$$

- Legge di Leonardo. ***In un condotto la velocità media su una sezione S normale al condotto e' inversamente proporzionale all'area della sezione.***



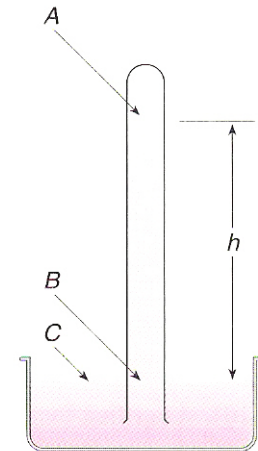
Barometro di Torricelli

- Tubo pieno di mercurio chiuso con un dito.
- Si immerge in una bacinella piena di mercurio. Il mercurio scende ad un'altezza di 76 cm.
- Poiche' nella parte superiore vi e' il vuoto, la pressione in A e' nulla.
- Per la legge di Pascal la pressione in C e B e' la stessa. La pressione in C e' quella atmosferica, in B e' quella della colonna di liquido.
- Quindi:

$$P = \rho_{Hg}gh$$

- La densita' del mercurio e':

$$\rho_{Hg} = 13595.5 \text{ Kg/m}^3$$



Leve idrauliche

- Per la legge di Pascal la pressione e' uguale su entrambi i lati:

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o}$$

- Quindi:

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_o} = Mg \frac{A_i}{A_o}$$

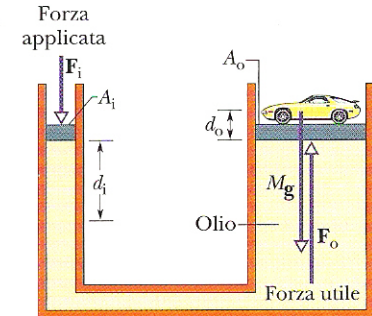
- L'abbassamento di un tratto d_i del pistone si traduce in uno spostamento di fluido di volume $V = d_i A_i$. Poiche' il fluido e' incompressibile:

$$V = d_i A_i = d_o A_o$$

- Per cui:

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}$$

- Lo spostamento del pistone maggiore e' quindi molto piu' piccolo.



Teorema di Bernoulli

- Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima.
- Le forze esercitate sul fluido contenuto fra le due sezioni dS_1 e dS_2 sono:
 - La forza di pressione $d\mathbf{F}_1$ esercitata sulla faccia dS_1 :

$$dF_1 = P_1 dS_1$$

- La forza di pressione $d\mathbf{F}_2$ esercitata sulla faccia dS_2 .

$$dF_2 = P_2 dS_2$$

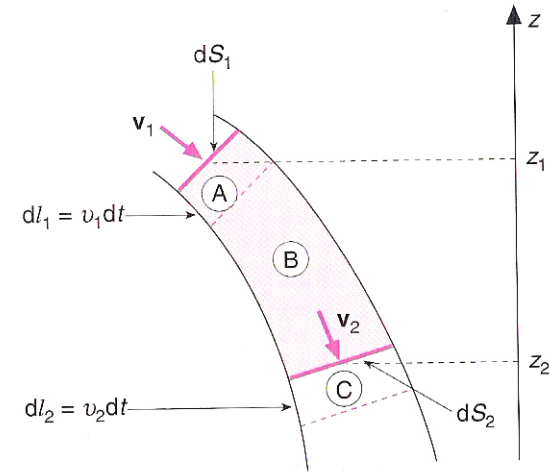
- Le forze sulle superfici laterali. Poiche' non vi e' attrito, le forze sono normali a tali superfici.
- La forza peso del fluido.
- Utilizziamo il teorema delle forze vive.
- Calcoliamo il lavoro fatto dalle tre forze e per spostare il fluido di un tratto infinitesimo. In un tempo dt il fluido si sara' spostato di un tratto $dl=v dt$, quindi:

$$dL_1 = P_1 dS_1 dl_1 = P_1 dS_1 v_1 dt \quad (1) \quad dL_2 = P_2 dS_2 v_2 dt = P_1 dS_1 v_1 dt \quad (2)$$

- dove nella (2) si e' fatto uso dell'equazione di continuita' :

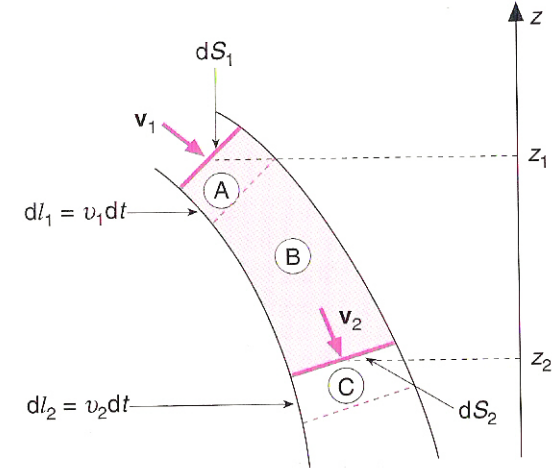
$$dS_2 v_2 = dS_1 v_1$$

- Il lavoro compiuto dalla forza peso lo possiamo calcolare dalla variazione di energia potenziale del fluido.
- Si puo' interpretare il movimento del fluido come quello di una porzione A che si sposta in C rimanendo B in quiete.



Teorema di Bernoulli

- L'energia potenziale del fluido in A e': $U_1 = \rho dS_1 dl_1 g z_1$
- Quello in C: $U_2 = \rho dS_2 dl_2 g z_2$
- Otteniamo quindi:



$$dL_4 = -\Delta U = U_1 - U_2 = \rho dS_1 dl_1 g z_1 - \rho dS_2 dl_2 g z_2 = \rho dS_1 v_1 dt g z_1 - \rho dS_2 v_2 dt g z_2 = \rho dS_1 v_1 dt g z_1 - \rho dS_1 v_1 dt g z_2 = \rho dS_1 v_1 dt g (z_1 - z_2)$$

- dove si e' fatto ancora uso dell'equazione di continuita'.
- Il lavoro complessivo sara':

$$dL = dL_1 + dL_2 + dL_4 = P_1 dS_1 v_1 dt + P_1 dS_1 v_1 dt + \rho dS_1 v_1 dt g (z_1 - z_2) = (P_1 - P_2) dS_1 v_1 dt + \rho dS_1 v_1 dt g (z_1 - z_2)$$

- Tale lavoro sara' uguale alla variazione di energia cinetica del fluido che passa da A a C:

$$dK = \frac{1}{2} \rho dS_2 v_2 dt v_2^2 - \frac{1}{2} \rho dS_1 v_1 dt v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dS_1 v_1 dt (v_2^2 - v_1^2)$$

- dove si e' fatto ancora uso dell'equazione di continuita'. Poiche':

$$dL = dK$$

- Otteniamo: $(P_1 - P_2) dS_1 v_1 dt + \rho dS_1 v_1 dt g (z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \rho dS_1 v_1 dt (v_2^2 - v_1^2)$

- Semplificando:

$$P_1 - P_2 + \rho g (z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Teorema di Bernoulli

- Questa si può scrivere anche come:

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (3)$$

- Teorema di Bernoulli: La somma della pressione, dell'energia potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è una costante.***
- La (3) si può anche scrivere:

$$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{costante}$$

- La somma dell'altezza piezometrica, geometrica e cinetica è una costante.***

Teorema di Torricelli

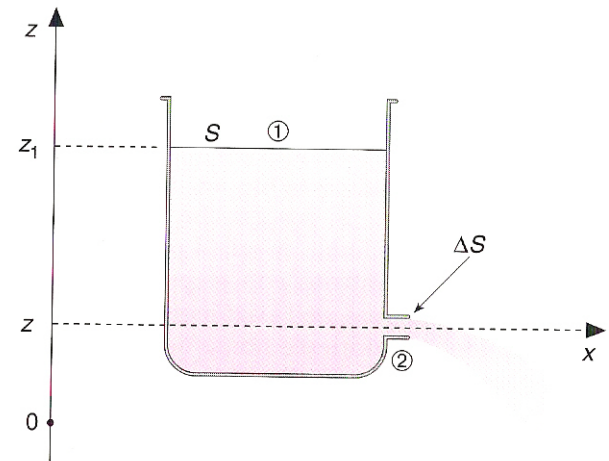
- Un fluido fuoriesca da un foro di sezione molto piccola rispetto alla superficie libera del serbatoio.
- Se il serbatoio e' molto grande, tale superficie libera ha velocita' trascurabile.
- Dal teorema di Bernoulli:

$$P_0 + \rho g z_1 = P_0 + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$$

- Quindi:

$$v = \sqrt{2g(z_1 - z)} = \sqrt{2gh}$$

- *Teorema di Torricelli. Il liquido che fuoriesce da un piccolo foro si muove con la stessa velocita' che avrebbe un corpo che cade liberamente nel campo gravitazionale.*



Tubo di Venturi

- Misura della portata di un condotto.
- Se consideriamo due sezioni:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

- da cui:

$$v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1}$$

- Dal teorema di Bernoulli, in cui $z_1 = z_2$,

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

- Quindi:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_2^2 (\frac{S_2}{S_1})^2) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 (1 - \frac{S_2^2}{S_1^2})$$

- Se colleghiamo due manometri possiamo misurare la pressione e quindi la velocità del fluido. Da questa otteniamo la portata:

$$Q = v_2 S_2$$

- Carburatore. Benzina che si muove nella zona di bassa pressione.

