

**Esercizi I parte**

1. Una persona spinge una cassa lungo un pavimento orizzontale con una forza  $\vec{F}$  di intensità  $500\text{ N}$  e che forma un angolo di  $30^\circ$  sopra l'orizzontale. La cassa ha una massa  $m = 150\text{ kg}$ . Il coefficiente di attrito statico è  $\mu_s = 0.10$  e quello di attrito dinamico è  $\mu_k = 0.08$ .
  - a) quanto vale la forza normale che il pavimento esercita sulla cassa mentre la persona sta spingendo?
  - b) la componente lungo l'orizzontale della forza  $\vec{F}$  è maggiore o minore del massimo della forza di attrito statico?
  - c) qual'è l'accelerazione della cassa?
2. Un corpo di massa  $M = 20\text{ kg}$  è lanciato verso l'alto lungo la superficie di un piano inclinato di un angolo  $\theta = 30^\circ$ , con velocità iniziale  $v_0 = 5\text{ m/s}$ . Il corpo raggiunge un'altezza verticale massima  $h$  rispetto alla quota iniziale, dissipando un'energia di  $50\text{ J}$  per attrito nel moto lungo la superficie.
  - a) Si determini  $h$ .
  - b) Qual'è la distanza  $d$  percorsa dal corpo lungo il piano inclinato prima di arrestarsi?
  - c) Che distanza  $d'$  percorrerebbe il corpo nelle stesse condizioni se non ci fosse attrito?
3. Un velocista corre i  $100\text{ m}$  piani in  $10\text{ s}$ . Si approssimi il suo moto ipotizzando che egli abbia un'accelerazione costante nei primi  $20\text{ m}$  e poi una velocità costante nei rimanenti  $80\text{ m}$ . Si determini:
  - a) il tempo impiegato per percorrere i primi  $20\text{ m}$ ;
  - b) il tempo impiegato per percorrere i rimanenti  $80\text{ m}$ ;
  - c) il modulo dell'accelerazione nei primi  $20\text{ m}$ ;
  - d) la sua velocità finale.
4. Uno sportivo di massa  $M = 80\text{ kg}$  si lascia cadere da un ponte alto  $h = 40\text{ m}$  agganciato ad una corda elastica di massa trascurabile e lunghezza a riposo  $l = 30\text{ m}$ , un'estremità della quale è fissata al ponte. Trascurando la resistenza dell'aria e ogni attrito, calcolare:
  - a) quanto deve valere la costante elastica  $k$  della corda perché la distanza minima dal suolo durante il moto sia  $z_{\min} = 4\text{ m}$ ;
  - b) la quota a cui viene raggiunta la velocità massima;
  - c) la velocità massima raggiunta.
5. Una pallina di massa  $m_1 = 100\text{ g}$  muovendosi su un piano orizzontale liscio con velocità  $v_0 = 0.10\text{ m/s}$  urta centralmente un'altra pallina di massa  $m_2 = 200\text{ g}$  posta sullo stesso piano e in quiete. La pallina 2 è ancorata all'estremo libero di una molla ideale di costante elastica  $k = 1.0\text{ N/m}$  disposta lungo la direzione del moto (l'altro estremo della molla è fisso). Determinare il massimo accorciamento della molla a seconda che l'urto tra le due palline sia:
  - a) elastico;
  - b) completamente anelastico.

6. Un copro rigido è costituito da un'asta di massa  $m = 8\text{ kg}$  e lunghezza  $d = 0.5\text{ m}$  e da un disco di massa  $M = 3m$  e raggio  $R = \frac{d}{4}$ . Un punto O del bordo del disco è saldato all'estremità dell'asta in modo che quando l'asta è orizzontale il centro del disco è alla stessa quota dell'asta. All'istante  $t = 0$  il corpo viene lasciato libero di ruotare attorno a un asse perpendicolare al corpo e passante per O, sotto l'azione della gravità. Determinare:
- a) l'accelerazione angolare del corpo all'istante  $t = 0$ ;
  - b) la velocità angolare del corpo nell'istante in cui l'asta è verticale.
7. Un cilindro pieno di raggio  $R = 20\text{ cm}$  ruota attorno al proprio asse centrale, orizzontale, con una velocità  $\omega_0 = 50.0\text{ rad/s}$ . All'istante  $t = 0$  viene posto su un piano orizzontale e lasciato libero. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra il cilindro e il piano è  $\mu_k = 0.15$ , si determini:
- a) il tempo  $t_r$  nel quale il moto del cilindro diventa di puro rotolamento;
  - b) la velocità del suo centro di massa in questo istante.

1. *Soluzione:*

a) indico con  $y$  l'asse ortogonale al piano e prendo il verso positivo verso l'alto. Dato che non c'è moto lungo  $y$ , la componente lungo  $y$  della forza totale deve annullarsi:  $N - mg + F \sin \theta = 0$ , da cui si trova  $N = 150 \cdot 10 - 500 \cdot 0.2 = 1250 \text{ N}$ .

b) la forza di attrito statico massima è  $f_{att,max} = \mu_s N = 0.1 \cdot 1250 = 125 \text{ N}$ , mentre la componente lungo  $x$  della forza  $\vec{F}$  è  $F_x = F \cos \theta = 500 \cdot 0.866 = 433 \text{ N}$ , quindi  $F_x > f_{att,max}$  quindi la cassa si muove.

c) entra in gioco la forza di attrito dinamico  $f_k = \mu_k N = 0.08 \cdot 1250 = 100 \text{ N}$ , e l'accelerazione è  $a = (F_x - f_k)/m = \frac{433-100}{150} = 2.2 \text{ m/s}^2$ .

2. *Soluzione:*

a) Posto l'energia potenziale gravitazionale uguale a zero alla base del piano inclinato, l'energia meccanica iniziale è uguale all'energia cinetica iniziale:  $E_{in}^{mecc} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{20 \cdot 5^2}{2} = 250 \text{ J}$ . L'energia meccanica finale è uguale all'energia potenziale gravitazionale finale, perchè l'oggetto arrivato alla quota  $h$  si ferma (istantaneamente, prima di tornare giù),  $E_{fin}^{mecc} = mgh$ . Imponendo,  $E_{fin}^{mecc} - E_{in}^{mecc} = L_{attrito} = -50 \text{ J}$  si trova  $mgh = -50 + 250 = 200 \text{ J}$  da cui  $h = \frac{200}{200} = 1 \text{ m}$ ;

b) la distanza sul piano è  $d = h/\sin \theta = 2 \text{ m}$ ;

c) se non ci fosse attrito  $mgh' = E_{in}^{mecc} = 250 \text{ J}$ , quindi  $h' = 1.25 \text{ m}$  da cui  $d' = 2.50 \text{ m}$ .

3. *Soluzione:*

Indico con  $t = 0$  l'istante in cui il velocista parte (da fermo) e con  $t$  il tempo impiegato a percorrere il primo tratto  $d_1$  (cioè  $d_1 = 20 \text{ m}$ ) e con  $a$  l'accelerazione. Si ha perciò  $d_1 = \frac{1}{2}at^2$  e dopo il primo tratto il velocista ha una velocità  $v = at$  che rimane costante fino alla fine. Per percorrere il secondo tratto  $d_2$  (cioè  $d_2 = 80 \text{ m}$ ) il velocista impiega  $(10 - t)$  secondi. Si ha perciò  $d_2 = v(10 - t) = at(10 - t)$ . Impostando il sistema delle due equazioni nelle incognite  $a$  e  $t$  si ha:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{2}at^2 \\ d_2 = v(10 - t) = at(10 - t) \end{cases} \quad \begin{cases} 20 = \frac{1}{2}at^2 \\ 80 = 10at - at^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 20 = \frac{1}{2}at^2 \\ 80 = 10at - 40 \end{cases}$$

dalla seconda si trova  $a = \frac{12}{t}$  e sostituendo nella prima si trova  $20 = \frac{1}{2} \frac{12}{t} t^2 = 6t$  da cui  $t = 3.3 \text{ s}$  e  $a = 3.6 \text{ m/s}^2$ . Infine  $v = 12 \text{ m/s}$ .

4. *Soluzione:* n.b.: i valori numerici sono calcolati supponendo  $g = 10 \text{ m/s}$

a) Posto come zero dell'energia potenziale il livello del suolo, l'energia meccanica iniziale è pari all'energia potenziale gravitazionale della massa  $M$  (perchè la velocità iniziale è nulla):  $E_{in}^{mecc} = Mgh$ . Nella situazione di allungamento massimo della corda (= distanza minima dal suolo), l'energia meccanica è pari alla somma dell'energia potenziale gravitazionale della massa  $M$  e dell'energia potenziale elastica dell'elastico (anche in questa situazione la velocità è nulla):  $E_{fin}^{mecc} = Mgz_{min} + \frac{1}{2}k\delta^2$ , dove con  $\delta$  ho indicato l'allungamento massimo dell'elastico. Vale inoltre la relazione geometrica  $h = l + \delta + z_{min}$ . Dato che nel sistema sono presenti solo forze conservative, l'energia meccanica si conserva:  $E_{in}^{mecc} = E_{fin}^{mecc}$ , quindi  $Mgh = Mgz_{min} + \frac{1}{2}k(h - z_{min} - l)^2$ , sostituendo i valori numerici si ha  $80 \cdot 10(40 - 4) = \frac{1}{2}k(40 - 4 - 30)^2$  da cui  $k = 1600 \text{ N/m}$ .

b) La velocità massima si ha quando l'accelerazione si annulla (per poi cambiare di segno e quindi la velocità inizia a diminuire), questo si ha quando l'allungamento  $\delta$  è tale per cui  $k\delta = Mg$  in questo istante la persona si trova a una quota  $z_0 = h - l - \frac{mg}{k} = 40 - 30 - 80 \cdot 10/1600 = 9.5 \text{ m}$

c) la velocità della persona quando si trova in questo punto si ottiene sempre utilizzando la conservazione dell'energia meccanica:  $Mgh = Mg(h - l - \frac{Mg}{k}) + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k}\right)^2$  da cui

$$v = \sqrt{2gl + \frac{Mg^2}{k}} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 30 + 80 \cdot 10^2/1600} = 24.6 \text{ m/s}.$$

5. a)

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

1 torna indietro e non interviene; 2 comprime la molla

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k x_M^2 \rightarrow x_M = \sqrt{\frac{m_2}{k}} v'_2 = \sqrt{\frac{m_2}{k}} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 3.0 \text{ cm}$$

b)  $V = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} k x_M^2 \rightarrow x_M = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} V = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 1.8 \text{ cm}$$

6. a) vale  $I_O \alpha = \tau$ , con

$$I_O = \frac{1}{3} m d^2 + \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{1}{3} m d^2 + \frac{3}{2} M R^2 = \frac{59}{96} m d^2$$

quando l'asta è orizzontale il momento della forza gravitazionale rispetto a O è

$$\tau = -m g \frac{d}{2} + M g R = \frac{1}{4} m g d \quad \text{entrante}$$

quindi  $\alpha = \frac{24}{59} \frac{g}{d} = 8 \text{ rad/s}^2$

b) all'istante iniziale l'asta è ferma e ha solo energia potenziale  $E_{mecc} = mgh + Mgh$ , con  $h$  quota del CM dal suolo. Quando l'asta è verticale sta ruotando ha energia cinetica rotazionale e energia potenziale

$$E_{mecc} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + mg(h + \frac{d}{2}) + Mg(h - R)$$

uguagliando le due si trova  $\omega = \sqrt{\frac{48g}{59d}} = 4.0 \text{ rad/s}$ .

7. supponiamo che il cilindro ruoti in verso orario quando viene messo sul piano il punto di contatto ha velocità verso sinistra e di genera una forza di attrito verso destra che mette in moto il CM e rallenta la rotazione (il momento è opposto alla velocità angolare iniziale)

$$M a_{cm} = \mu_k M g \quad I \alpha = -R \mu_k M g$$

la forza e il momento sono costanti quindi si integra l'equazione e si trova

$$v_{cm}(t) = \mu_k g t \quad \omega(t) = \omega_0 - \frac{R \mu_k M g}{I} t = \omega_0 - \frac{2 \mu_k g}{R} t$$

il rotolamento puro si ha quando  $v_{cm}(t_r) = \omega(t_r) R$  da cui si ricava  $t_r = \frac{\omega_0 R}{3 \mu_k g} = 2.26 \text{ s}$  e  $v_{cm}(t_r) = \mu_k g t_r = \frac{\omega_0 R}{3} = 3.33 \text{ m/s}$