

# Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2015-2016

## Fisica 1



Prof. Marisa Bonini,  
titolare del corso

Dr. Emilia Livioti,  
esercitazioni

2 marzo 2016

# Scalari e vettori

In fisica tutte le grandezze vengono catalogate in base alle loro proprietà di trasformazione rispetto a cambiamenti di sistemi di riferimento spaziali. Gli oggetti più semplici sono quelli invarianti, cioè quelli che assumono lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Vengono denominati **SCALARI**.

Esempi sono temperatura, pressione, peso, lunghezza, volume, etc. Uno scalare è espresso attraverso un numero reale espresso in opportune unità ed ogni osservatore assegna lo stesso numero alla grandezza fisica, a meno degli errori della misura. Per manipolare le grandezze scalari si adoperano le regole dell'algebra ordinaria.

## Grandezze vettoriali

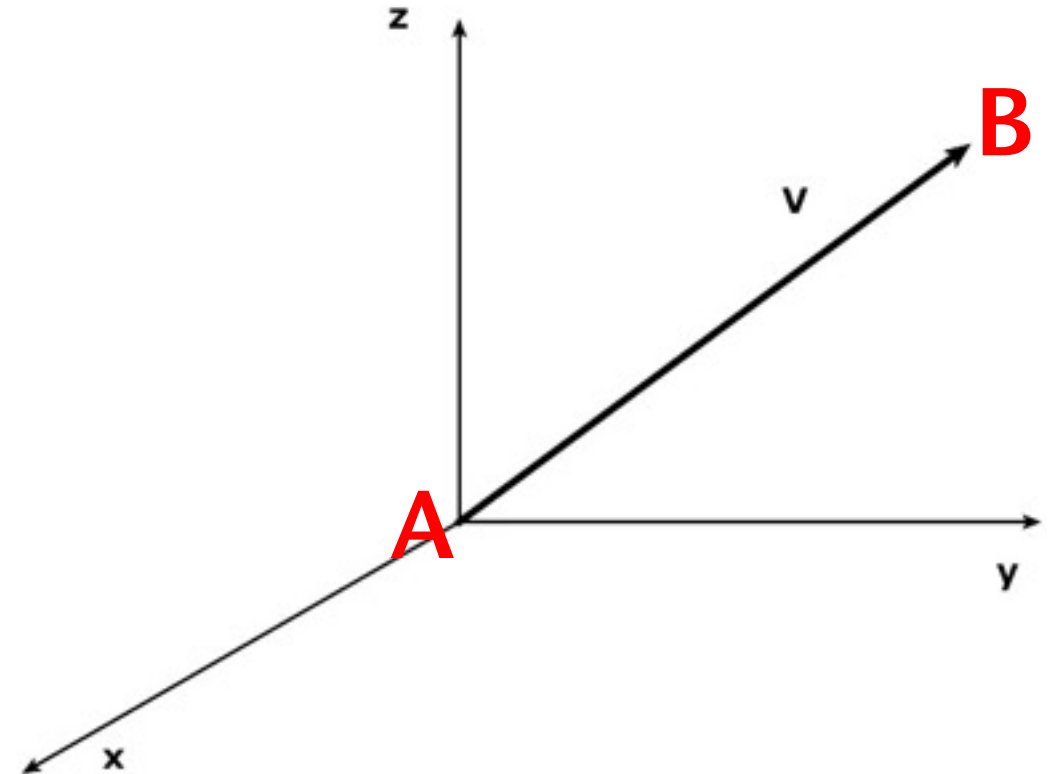
sono grandezze fisiche che possono essere rappresentate da **vettori**: Un vettore è un ente geometrico individuato da un' **ampiezza** o modulo (lunghezza del segmento che rappresenta il vettore), una **direzione**, cioè la retta a cui appartiene il segmento, e un **verso**, cioè una delle due orientazioni del segmento sulla retta.

Esempi di grandezze vettoriali sono lo spostamento, la velocità, la forza.

I vettori si denotano con una lettera con sopra una freccia:  $\vec{A}$  oppure con una lettera in grassetto  $\mathbf{A}$   
il suo modulo si indica con  $|\mathbf{A}|$  o più semplicemente con  $A$

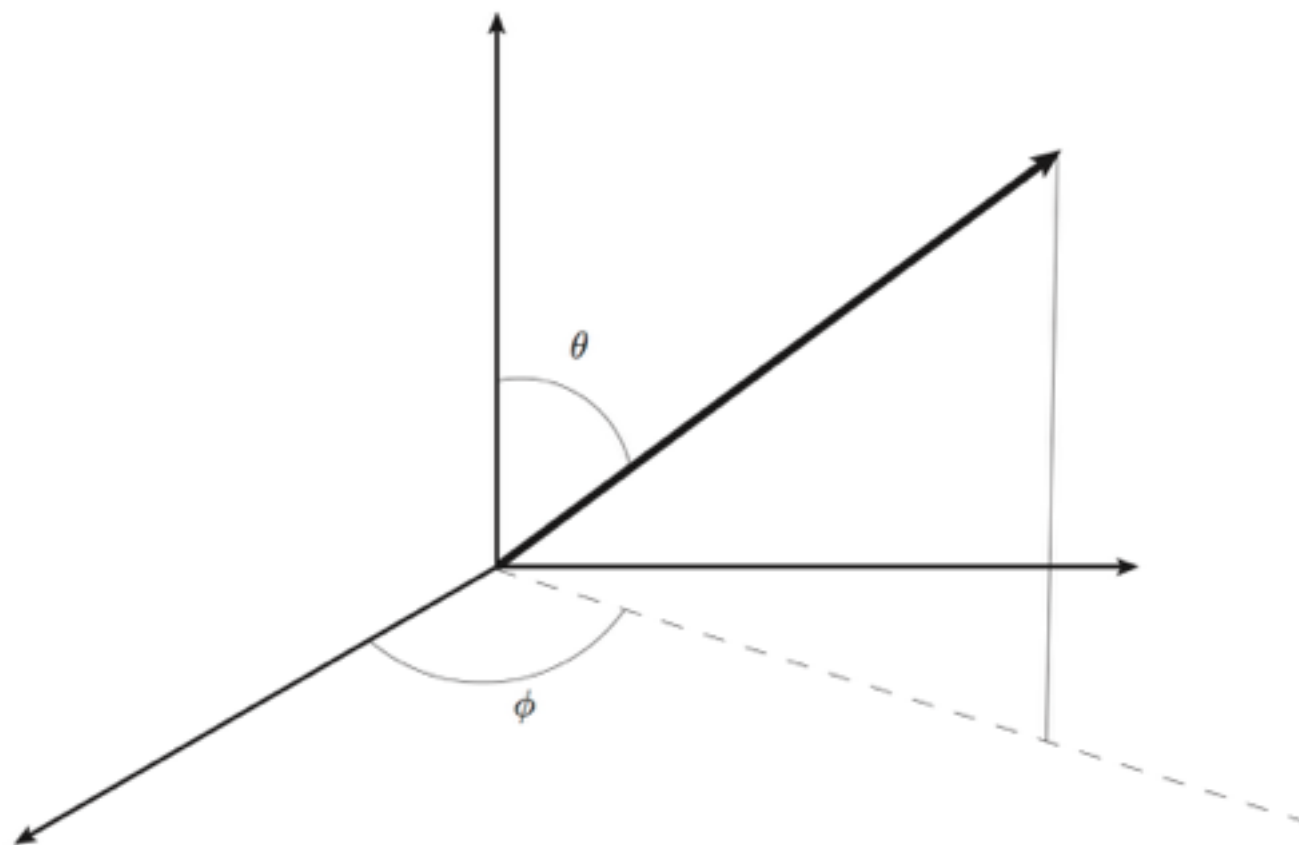
## Vettori

La struttura di vettore è utilizzata per rappresentare oggetti che siano dotati di una direzione nello spazio e di una lunghezza. Il caso tipico è quello dello **spostamento nello spazio**. Il movimento da un punto A a un punto B è rappresentato da un vettore che ha direzione  $A \rightarrow B$  e lunghezza data dalla distanza tra A e B.

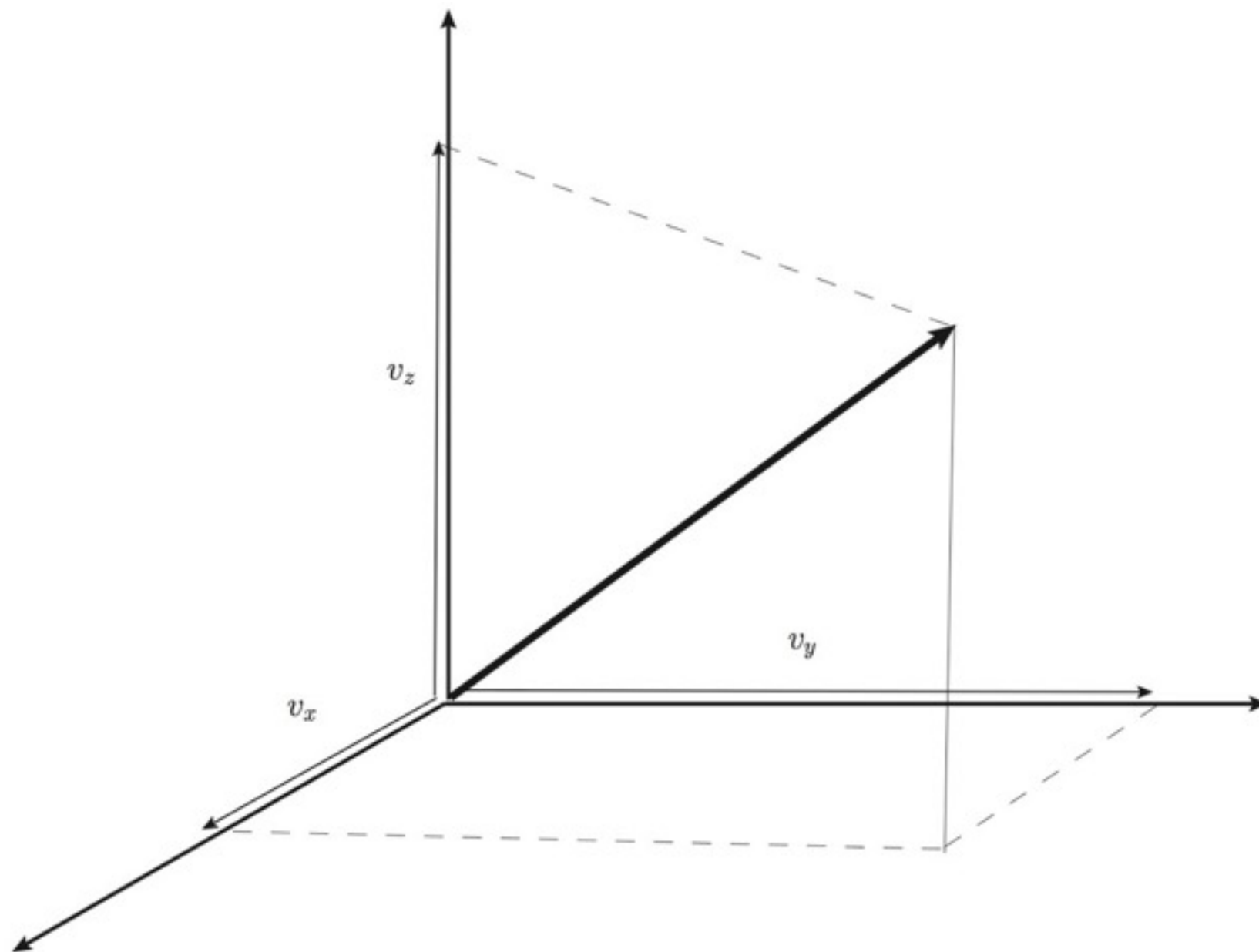


**Come si rappresenta un vettore, a parte la rappresentazione grafica ?**

Un vettore è individuato dalla sua lunghezza e dalla sua direzione. Quest'ultima si può caratterizzare tramite due angoli  $\Theta$ ,  $\varphi$ , equivalenti a latitudine e longitudine sulla superficie terrestre.



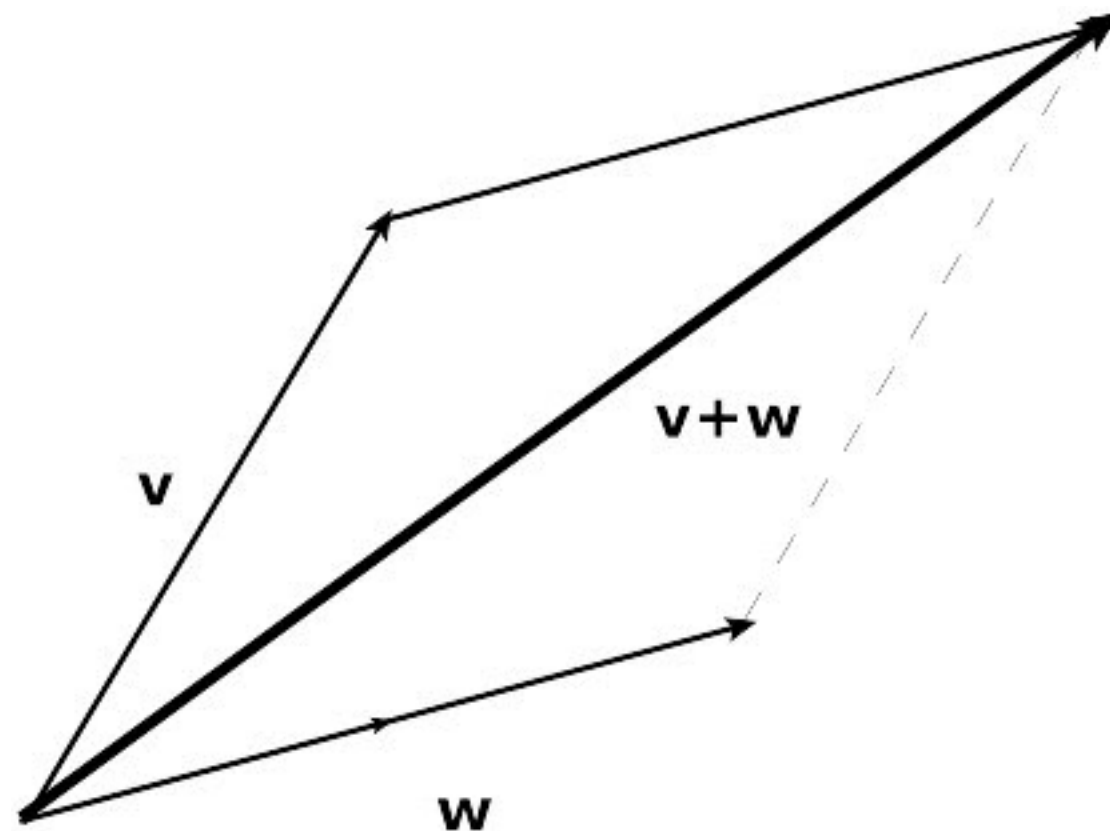
Oppure, più convenientemente, si rappresenta un vettore attraverso le sue **proiezioni lungo gli assi di un riferimento cartesiano**  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$



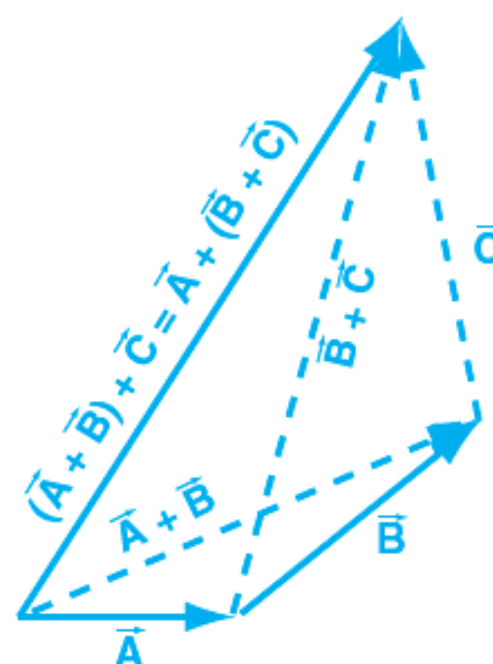
ci sono dei vettori particolari: quelli che sono diretti lungo gli assi del sistema di coordinate e hanno un'ampiezza unitaria (in una data unità di misure) questi vettori sono detti **versori** la loro funzione è quella di individuare le direzioni degli assi coordinati  $\hat{i}=(1,0,0)$ ,  $\hat{j}=(0,1,0)$ ,  $\hat{k}=(0,0,1)$   
un qualunque vettore può essere espresso con le sue componenti e i versori

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Sui vettori è definita in modo naturale l'operazione di **somma**. Questa corrisponde graficamente a spostare uno dei vettori in modo che la sua base coincida con il vertice del secondo, senza cambiarne l'orientazione



Si dice che si esegue un trasporto parallelo di  $w$  e la somma dei vettori coincide con la diagonale del parallelogramma.



**Figura 2.6**

I vettori possono essere raggruppati e sommati in qualsiasi ordine.

La somma si esprime in modo banale in termini delle componenti:

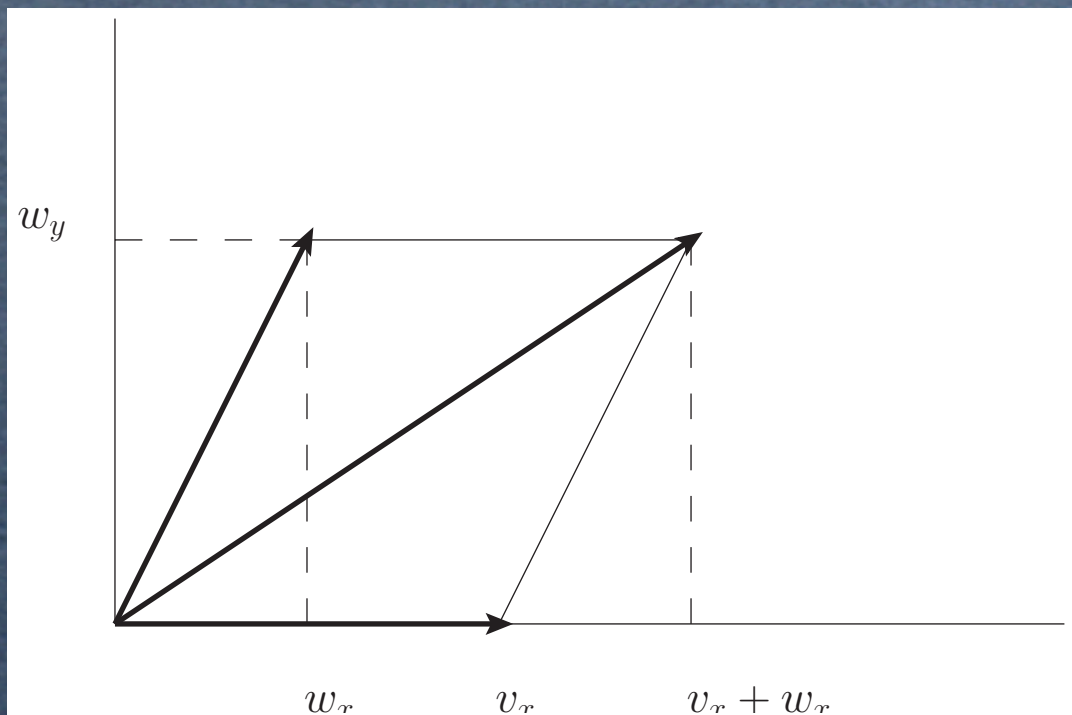
$$\text{se } \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \text{ e } \vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

$$(v+w)_x = v_x + w_x$$

$$(v+w)_y = v_y + w_y$$

$$(v+w)_z = v_z + w_z$$

Dimostriamo la formula precedente utilizzando le rotazioni:  
poniamo  $v$  nella direzione  $x$  e  $w$  nel piano  $x,y$  – cosa che possiamo fare liberamente, o meglio possiamo liberamente utilizzare il sistema di riferimento che più ci sembra conveniente! In questo sistema risulta evidente che



$$(v + w)_x = v_x + w_x$$

$$(v + w)_y = v_y + w_y$$

$$(v + w)_z = v_z + w_z$$

Ma una relazione tra vettori  $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$  se è vera in un sistema di riferimento lo è in qualunque altro riferimento

Altre operazioni sui vettori:

se al vettore  $\mathbf{v}$  sommiamo sé stesso cioè prendiamo la somma  $\mathbf{v}+\mathbf{v}$  questa sarà un vettore con la stessa direzione di  $\mathbf{v}$  e lunghezza doppia.  $\mathbf{v}+\mathbf{v}+\dots+\mathbf{v}$  ( $n$  volte) sarà un vettore con la stessa direzione di  $\mathbf{v}$  e lunghezza  $n$  volte maggiore.

In generale si definisce  $r \mathbf{v}$ , con  $r$  reale un vettore con direzione uguale a  $\mathbf{v}$  e lunghezza moltiplicata per  $r$ .

Cosa significa moltiplicare per  $-1$ ?  $\mathbf{w}=-\mathbf{v}$

$\mathbf{w}$  ha stessa ampiezza e direzione di  $\mathbf{v}$  ma verso opposto

altre operazioni sui vettori, oltre alla somma:

1. Prodotto scalare
2. Prodotto vettoriale

Vediamo il primo: il prodotto scalare viene definito per una qualunque coppia di vettori:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

come il prodotto delle lunghezze dei due vettori e del coseno dell'angolo da loro formato.

In particolare:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2$

$u_1$  è la componente di  $\mathbf{u}$  lungo l'asse coordinato  $i$

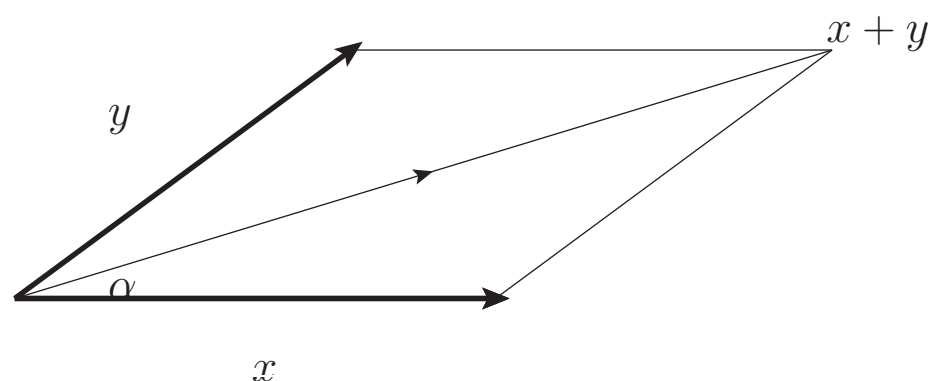
$u_2$  è la componente di  $\mathbf{u}$  lungo l'asse coordinato  $j$

$u_3$  è la componente di  $\mathbf{u}$  lungo l'asse coordinato  $k$

Il prodotto scalare permette di generalizzare il teorema di Pitagora:

la lunghezza della somma di due vettori ortogonali tra loro (cioé  $u \cdot v = 0$ ) è data dal teorema di Pitagora  $(u+v)^2 = u^2 + v^2$

$$u^2 = u \cdot u$$



Se invece i due vettori NON sono ortogonali si ha

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2 \, x \cdot y$$

e quindi:

$$\begin{aligned} & (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2 - (y_3)^2 \\ &= 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) = 2 \, x \cdot y \end{aligned}$$

Abbiamo perciò una formula generale del prodotto scalare in termini di componenti

In definitiva:

Il prodotto scalare tra due vettori, diciamo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , si definisce come il prodotto delle lunghezze  $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$  con il coseno dell'angolo formato dai due vettori.

Caso per caso può essere conveniente utilizzare altre rappresentazioni equivalenti:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + v_2 v_2 + u_3 v_3$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$  prodotto di  $|\mathbf{v}|$  per la proiezione di  $\mathbf{u}$  lungo  $\mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$  prodotto di  $|\mathbf{u}|$  per la proiezione di  $\mathbf{v}$  lungo  $\mathbf{u}$

Il prodotto scalare è simmetrico nei due fattori:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Vedremo all'opera il prodotto scalare quando parleremo di  
LAVORO di una FORZA

## Prodotto vettoriale

La seconda operazione che si definisce su coppie di vettori è il loro prodotto vettoriale:  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

.

La definizione è la seguente: il prodotto vettore  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  è un **vettore** che ha direzione ortogonale al piano formato dai vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e lunghezza pari al prodotto  $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$  dove  $\alpha$  è l'angolo formato dai due vettori.

C'è da risolvere però un'ambiguità. Se la direzione è fissata rimane da definire il verso.

Ad es.  $\mathbf{u}=(1,0,0)$ ,  $\mathbf{v}=(0,1,0)$ : il prodotto  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  sarà in direzione "z" di lunghezza 1 ma in quale verso,  $\uparrow$  oppure  $\downarrow$  ? Qui è necessaria una convenzione sulla orientazione dello spazio.

Si dice che tre vettori, nell'ordine,  $u$ ,  $v$  e  $w$  formano una “terna destrorsa” se, riferendosi alla propria mano destra,  $u$  può essere fatto coincidere con il pollice,  $v$  con l'indice e il risultato  $w$  con il medio (nella posizione naturale della mano senza contorsioni ...).

Secondo questa convenzione, nel caso precedente si avrà  
 $(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$

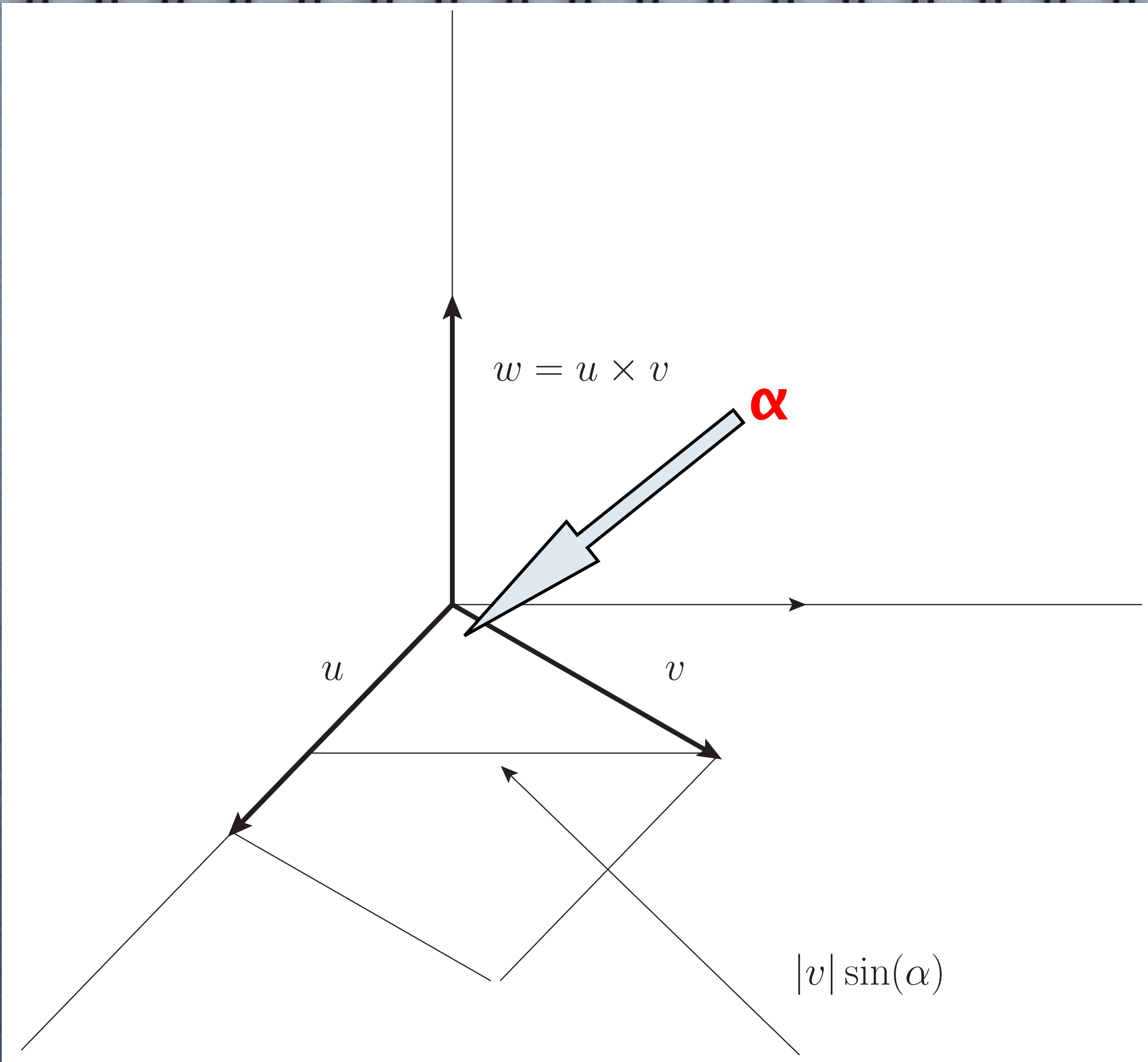


Altri modo di rappresentare il prodotto vettore, tra loro equivalenti...

Il prodotto  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  rispetta il concetto di vettore, ossia se ruotiamo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  attraverso una rotazione rigida nello spazio, anche  $\mathbf{w}$  risulta ruotato con la medesima rotazione. Quindi se vogliamo calcolare rapidamente  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  possiamo sempre orientare gli assi in modo che  $\mathbf{u}$  sia lungo l'asse  $x$ ,  $\mathbf{v}$  sia nel piano  $x$ - $y$  con componenti positive e di conseguenza  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  sarà diretto lungo l'asse  $z$ :

In componenti si ha  $\mathbf{u}=(|\mathbf{u}|,0,0)$   $\mathbf{v}=(v_1,v_2,0)$   $\mathbf{w}=(0,0,|\mathbf{u}|v_2)$

si noti che la lunghezza di  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  coincide con l'area del parallelogramma formato da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$



Infine c'è una rappresentazione del prodotto vettore in termini delle componenti:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

dove  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sono i versori che definiscono il sistema di riferimento cartesiano e  $|\dots|$  indica il determinante.

Dunque:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

**e questa è di solito la rappresentazione più conveniente!**

Un altro significato geometrico del prodotto vettore  
Consideriamo tre vettori  $a, b, c$  e costruiamo il prodotto

$$V = a \cdot b \times c$$

In termini di componenti si ha

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Il significato di  $V$  è quello di volume del parallelepipedo avente  $a, b$  e  $c$  come spigoli! Inoltre risulta evidente che si può scrivere equivalentemente

$$a \cdot b \times c = c \cdot a \times b = a \times b \cdot c$$

Un'altra espressione che compare spesso in meccanica è

$$a \times b \times c$$

Qui c'è una sorpresa. **L'espressione NON è ben definita!** Il fatto è che il prodotto vettore oltre a essere

**NON-COMMUTATIVO**

è anche

**NON-ASSOCIATIVO**

nel senso che il doppio prodotto deve specificare quale delle due operazioni si esegue per prima:

$$a \times (b \times c) \text{ oppure } (a \times b) \times c ?$$

Approfondiremo questi fatti nelle Esercitazioni ma a titolo di esempio:

$$i \times (j \times j) = 0, (i \times j) \times j = k \times j = -i$$



# FINE

della seconda lezione

Prossima lezione: **3 marzo ore 10:30**

2 marzo 2016