

Moto di corpi estesi

Schematizziamo un corpo esteso come un insieme di masse Δm_i con le distanze tra le possibili coppie fisse: l'elemento di volume ΔV_i in cui è contenuta massa Δm_i è abbastanza piccolo da poter essere considerato come puntiforme (ma contiene un numero elevato di atomi).

densità volumica di massa

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

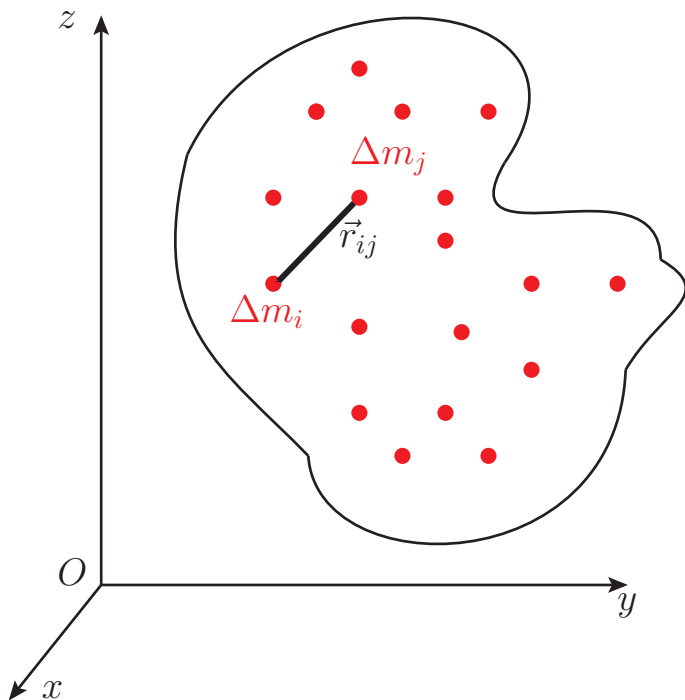
$$M = \int_V \rho dV \quad \text{massa del corpo}$$

In generale $\rho = \rho(x, y, z)$, ma per corpi omogenei ρ è costante

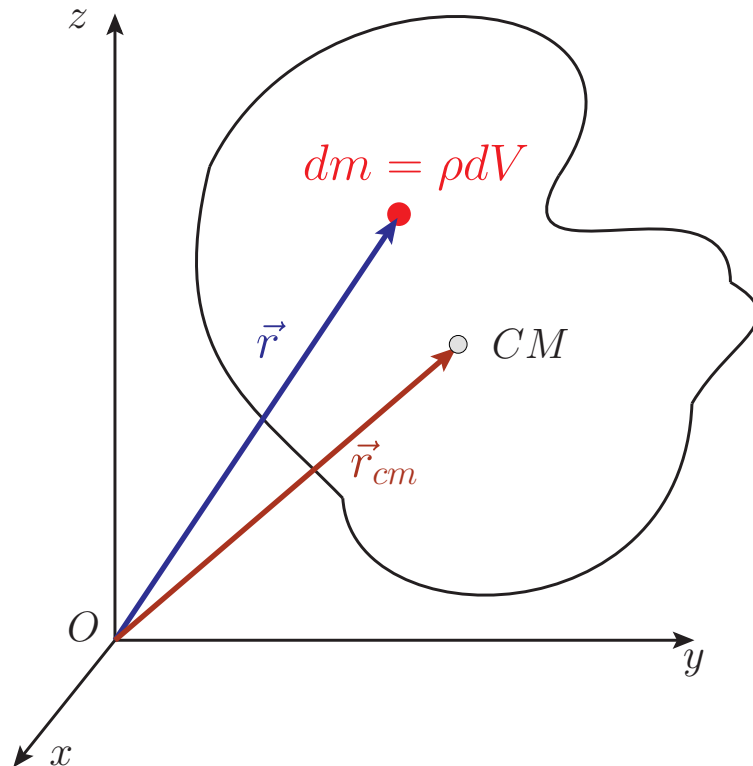
$$\rho = \frac{M}{V}$$

Se la massa è distribuita su una superficie (o su una linea) si introduce la densità superficiale ρ_s di massa (densità lineare di massa ρ_l)

$$M = \int_S \rho_s dS \quad \text{o} \quad M = \int_L \rho_l dl$$



* Centro di massa di un solido



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \rightarrow \frac{1}{M} \int_V \rho dV \vec{r}$$

Per corpi omogenei

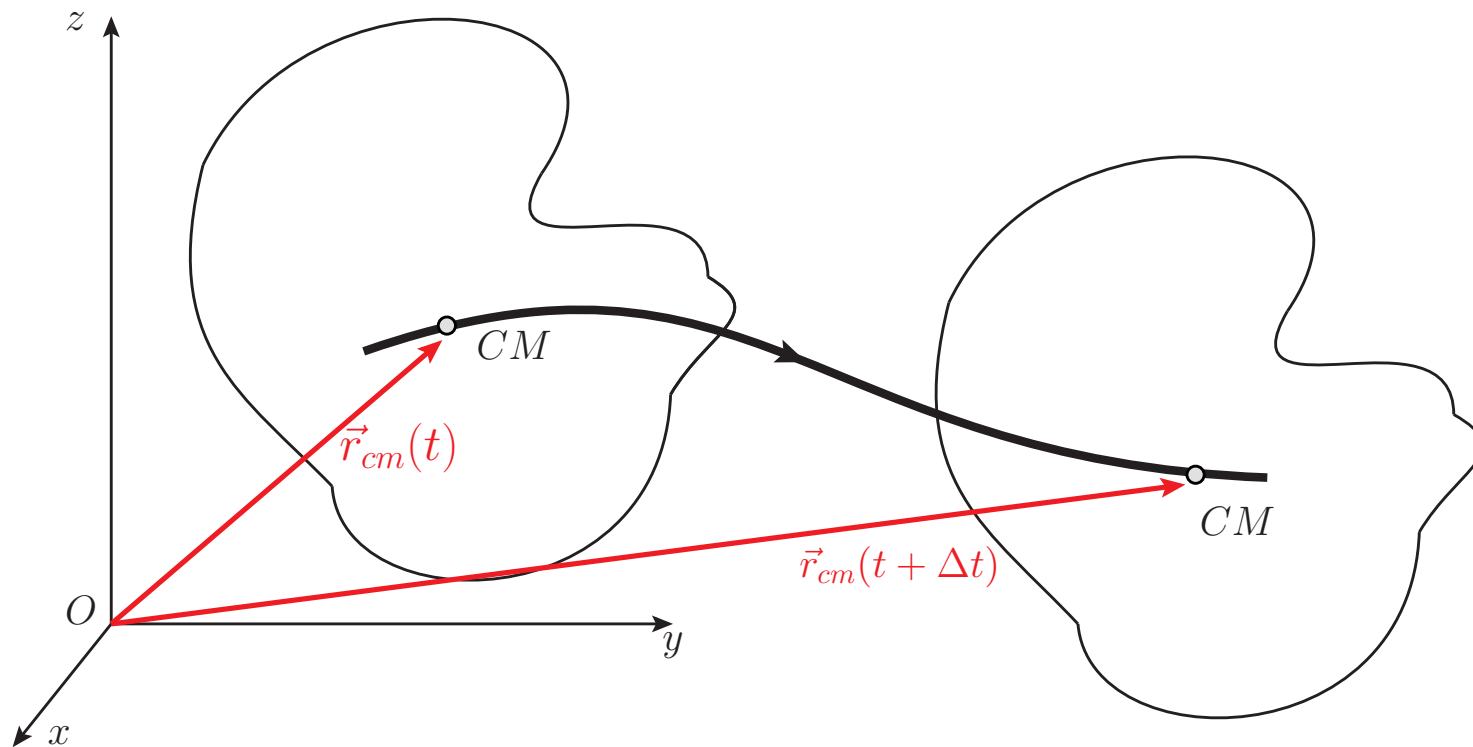
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_V dV \vec{r} = \frac{1}{V} \int_V dV \vec{r}$$

se il corpo possiede un centro di simmetria, o un asse di simmetria il CM si trova su di esso: ad esempio il CM di una sfera omogenea di massa è nel centro della sfera, quello di un disco omogeneo è nel centro del disco.

Esercizio: calcolo del centro di massa di una disco semicircolare di raggio R omogeneo (Risp.:sull'asse del semidisco alla distanza dal centro di $\frac{4R}{3\pi}$).

* Moti di un corpo rigido

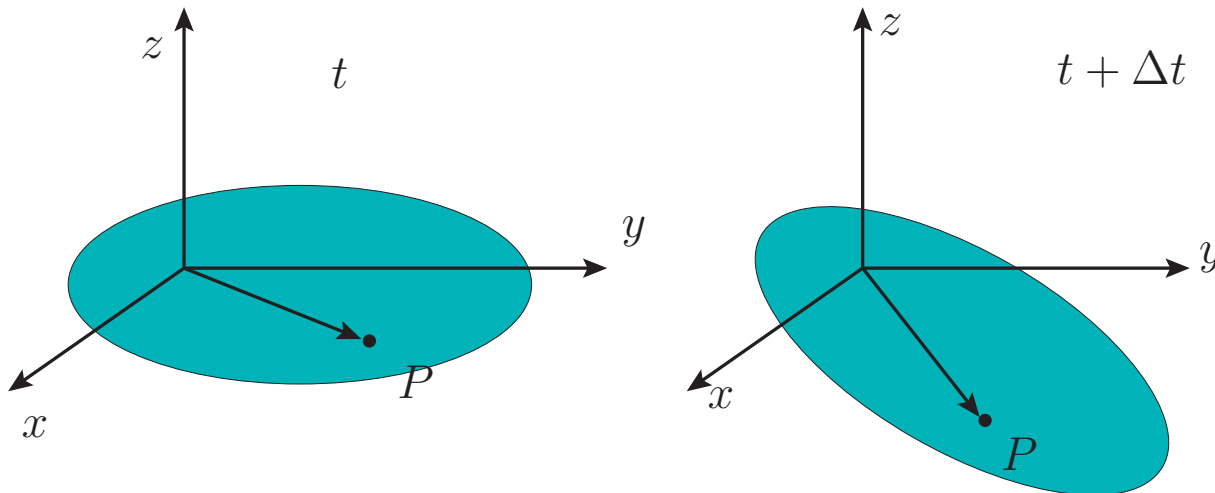
Per un corpo esteso abbiamo due tipi di moti: **moti di pura traslazione**, quando tutti i punti del corpo eseguono la stessa traiettoria del centro di massa:



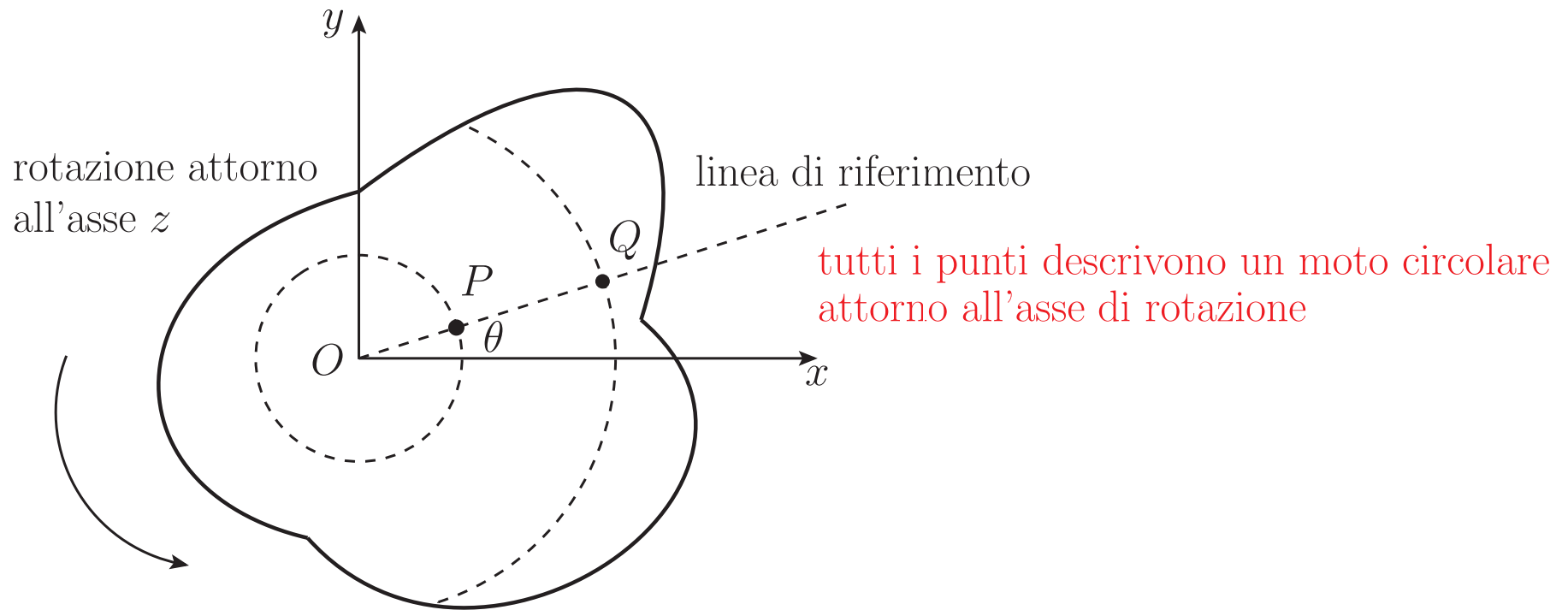
nel sistema di riferimento del CM il corpo è fermo ($K' = 0$) quindi l'energia cinetica

$$K = K' + \frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2 = \frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2$$

il **moto di pura rotazione**, quando il moto avviene attorno ad un asse fisso, che non modifica la sua posizione, questo asse è detto **asse di rotazione**. Il moto più generale è una combinazione di questi due moti ed è detto **moto rototraslazionale**. Studiamo prima il puro moto rotazionale.



Poichè il corpo è rigido le distanze tra le sue parti non cambiano, nel moto rotazionale **ciascun punto del corpo si muove su una circonferenza il cui centro giace sull'asse di rotazione**; inoltre in un fissato Δt il vettore posizione descrive lo stesso angolo per tutti i punti del corpo



Prendiamo una linea di riferimento nel piano ortogonale all'asse di rotazione (ad esempio quella che passa per O e il punto P): questa linea ruota solidale con il corpo e possiamo descrivere il moto del corpo mediante la **posizione angolare** θ di questa linea rispetto ad esempio l'asse x :

$$\theta = \frac{s}{r}$$

dove s è la lunghezza dell'arco della circonferenza descritta da un qualunque punto sulla linea di riferimento e r il raggio di quella circonferenza.

Durante il moto rotatorio la posizione angolare θ è funzione del tempo.

velocità angolare istantanea $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

velocità e accelerazione angolare sono le stesse in tutti i punti del corpo rigido.

La velocità angolare è **positiva** quando il corpo ruota in senso **antiorario** e si misura in **radiante/sec** (si usa anche “giro al minuto” (giri/min): $1 \text{ rad/sec} = 30/\pi \text{ giri/min}$).

L'accelerazione angolare si misura in **rad/sec²**.

★ **Relazione tra la velocità angolare e la velocità lineare**

Se il corpo rigido ruota di un angolo θ , un punto generico del corpo posto a una distanza r dall'asse di rotazione percorre un arco di circonferenza lungo $s = \theta r$.

velocità lineare scalare del punto $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r = \omega r \Rightarrow v = \omega r$

Tutti i punti di un corpo rigido hanno la stessa velocità angolare mentre la velocità lineare è tanto più intensa quanto maggiore è la distanza del punto dall'asse di rotazione.

* Il periodo di rivoluzione T

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

è lo stesso per tutti i punti del corpo.

* Accelerazione tangenziale e centripeta

Derivando la velocità lineare rispetto al tempo si ottiene

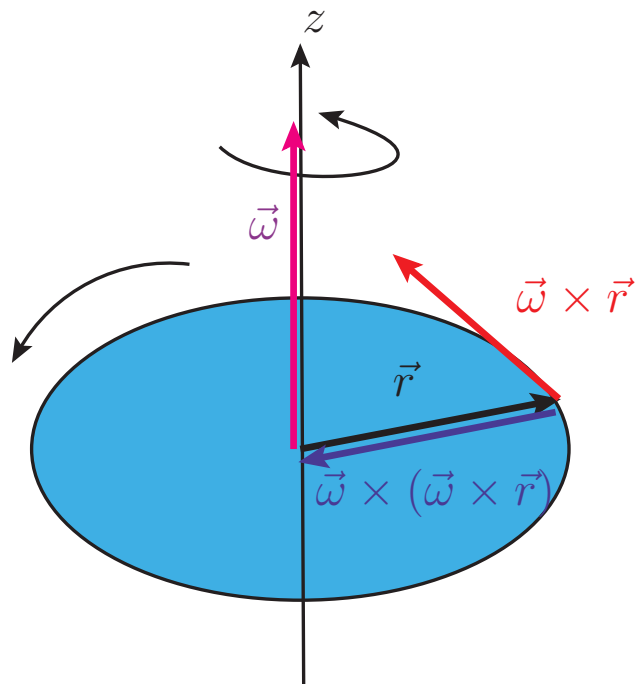
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \alpha r \quad \text{accelerazione tangenziale}$$

L'accelerazione centripeta deriva dalla variazione della direzione di v

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

ed è diretta lungo il raggio.

* Notazione vettoriale



vettore **velocità angolare**: $\vec{\omega}$

$$|\vec{\omega}| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

direzione ortogonale al piano della circonferenza, cioè lungo l'asse di rotazione

verso dato dalla regola della mano destra

velocità lineare: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

vettore **accelerazione angolare**: $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ diretta come } \vec{\omega}$$

In termini di $\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$, l'accelerazione lineare $\vec{a}$ si scrive:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \text{ accelerazione tangenziale}$$

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r} \text{ accelerazione centripeta}$$

Energia cinetica rotazionale

Per ricavare l'energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse, suddividiamo il corpo rigido in tanti **volumetti** e sommiamo le energie cinetiche dei singoli elementi. Ciascun elemento ha una velocità diversa $v = \omega r$ (dove r è la distanza dell'elemento dall'asse di rotazione)

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

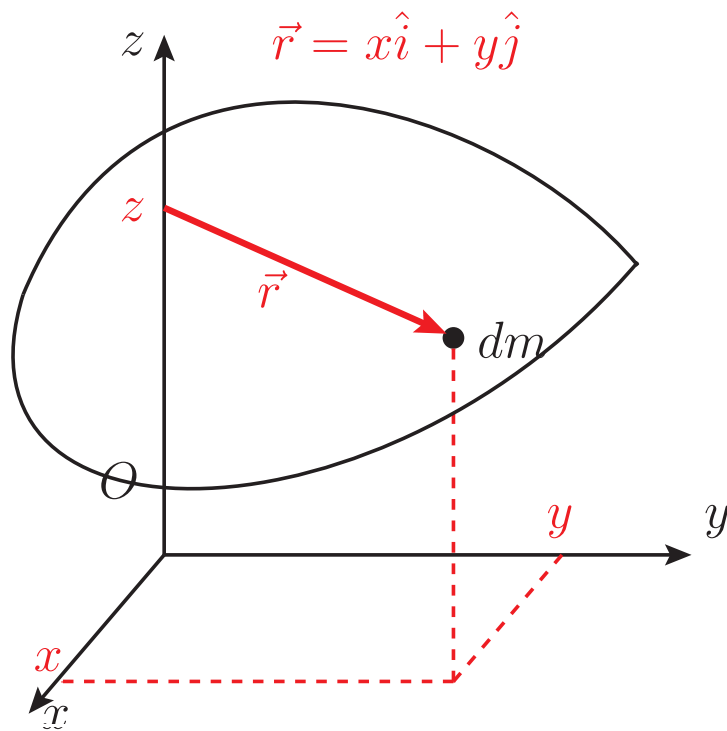
dove ω è la stessa per tutti i punti. Alla quantità in parentesi si dà il nome di **momento d'inerzia del corpo rispetto a quel particolare asse di rotazione**

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Energia cinetica rotazionale di un corpo rigido di momento d'inerzia I :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Si noti l'analogia con $K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ che dà l'energia cinetica di un corpo rigido in traslazione pura (in questo caso tutti i punti del corpo si muovono con la stessa velocità, che è anche uguale alla velocità del centro di massa). L'energia cinetica per il moto di pura rotazione di un corpo rigido si ottiene sostituendo $M \rightarrow I$ e $v_{cm} \rightarrow \omega$ (si noti che però I dipende dall'asse di rotazione, mentre M non dipende dalla direzione del moto).



Il valore del momento di inerzia di un corpo dipende dalla sua forma, dalla sua densità e dall'asse rispetto a cui viene calcolato (in figura questo asse è l'asse z).

La massa è distribuita in modo continuo nel solido

$$m_i \rightarrow dm = \rho(x, y, z)dV$$

e la sommatoria diventa un integrale sul volume del solido quindi

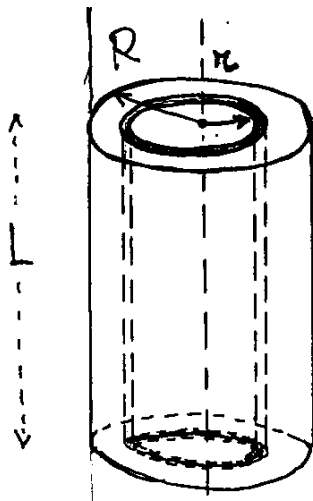
$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

r è la distanza dell'elemento di volume dV dall'asse di rotazione (se questa è l'asse z come in figura $r^2 = x^2 + y^2$)

solido con densità uniforme $\rho = M/V$

$$I = \frac{M}{V} \int r^2 dV$$

Esempio: momento d'inerzia di un cilindro di densità uniforme rispetto all'asse del cilindro. Siano R il raggio di base, L l'altezza del cilindro e M la sua massa.



per calcolare I suddividiamo il volume del cilindro in guaine cilindriche concentriche di raggio r (tutti i punti della guaina hanno la stessa distanza dall'asse) e spessore dr , la massa della guaina è $dm = \rho dV = \rho L 2\pi r dr$

$$I = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi L \rho R^4}{2}$$

ricordando che la massa del cilindro è $M = \rho V = \rho \pi R^2 L$ si ottiene

momento di inerzia di un cilindro rispetto all'asse $I = \frac{1}{2} M R^2$

Il calcolo il momento d'inerzia rispetto ad un asse di simmetria (quando esiste) di un corpo è relativamente semplice. Nel caso di un solido di forma arbitraria il calcolo è complesso e di solito si può fare solo numericamente.



$$MR^2$$



$$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}MW^2$$



$$\frac{1}{2}MR^2$$



$$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



$$\frac{2}{5}MR^2$$



$$\frac{1}{12}ML^2$$



$$\frac{1}{3}ML^2$$



$$\frac{1}{12}M(L^2 + W^2)$$