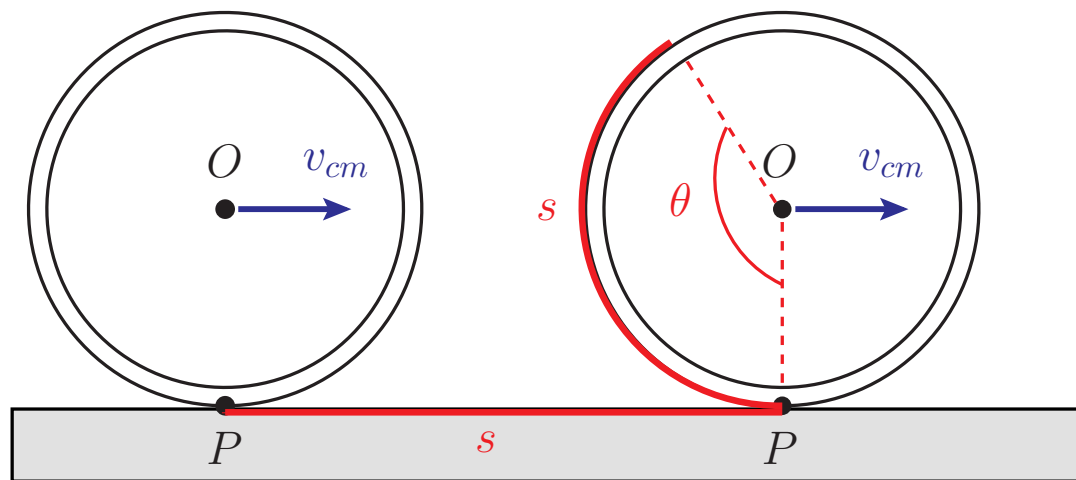


* Moti rototraslatori: il rotolamento puro

Es.: moto di una ruota di bicicletta che si muove a velocità costante rotolando sulla strada senza slittare. Il centro di massa O della ruota si sposta in avanti con velocità v_{CM} . Per un osservatore il punto P che tocca la strada si sposta con la stessa velocità e rimane sempre sotto O (sulla verticale da O). Nell'intervallo di tempo t , P e O si spostano di s .



Il ciclista vede ruotare la ruota di un angolo θ intorno ad O e il punto che inizialmente era a contatto col terreno percorre nel tempo t un arco di circonferenza lungo $s = r\theta$, dove r è il raggio della ruota.

velocità angolare della ruota:

$$\omega = d\theta/dt$$

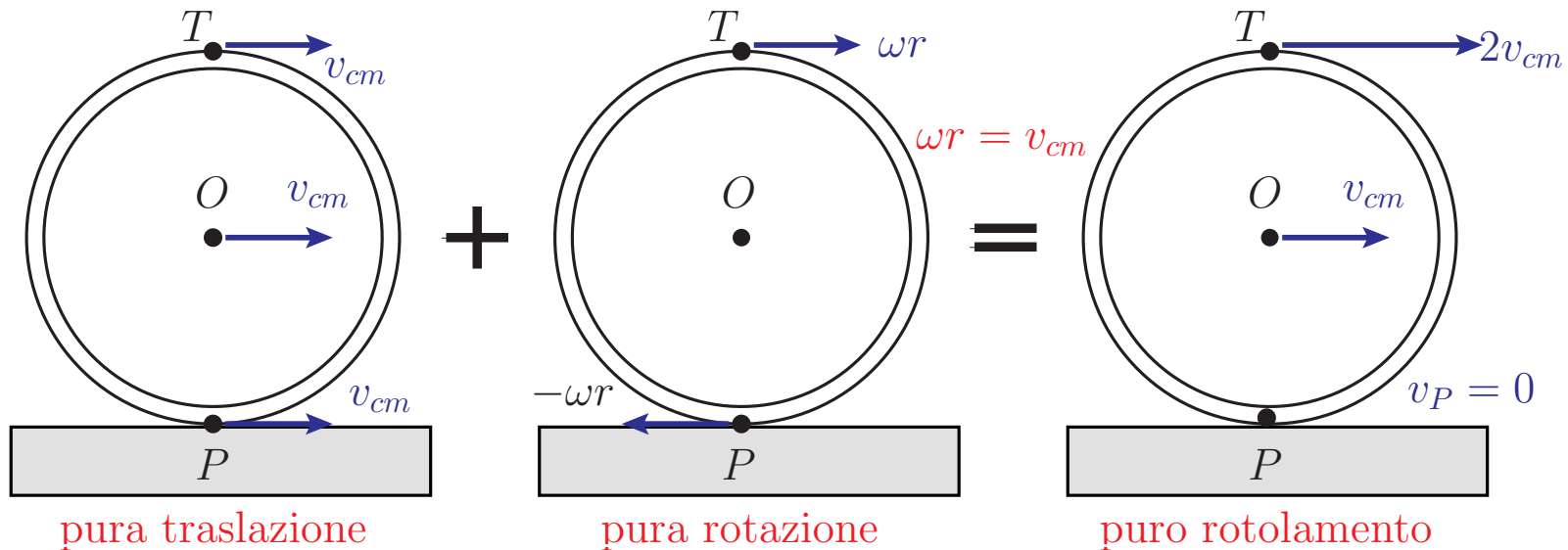
velocità lineare del CM:

$$v_{CM} = ds/dt = d(r\theta)/dt$$

moto di rotolamento puro

$$v_{CM} = \omega r$$

Il moto di rotolamento è la **combinazione di un moto di traslazione e un moto di pura rotazione:**

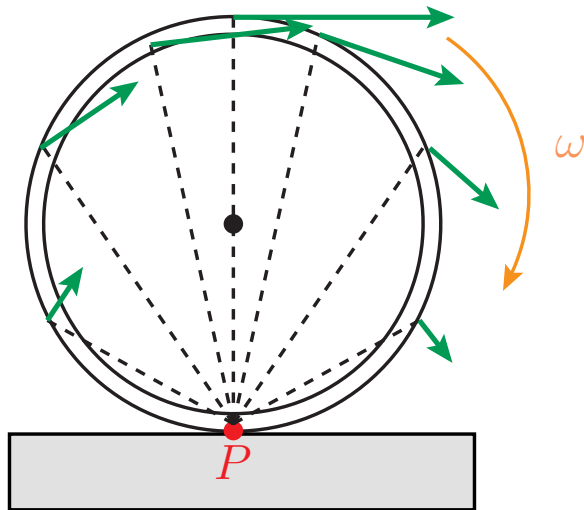


il punto P ha velocità nulla (non slitta). T ha velocità pari a $2v_{CM}$.

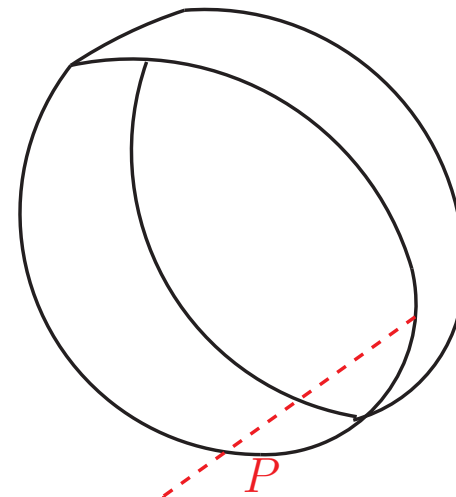
Un punto sul bordo della ruota descrive una curva detta **cicloide**.

Il rotolamento puro è un particolare moto rototraslatorio caratterizzato da una velocità di trascinamento del punto istantaneo di contatto tra corpo e superficie pari a zero.

Un modo alternativo di vedere il rotolamento è quello di introdurre un asse istantaneo di rotazione in P , il punto di contatto: istante per istante tutto il corpo ruota attorno a P con velocità angolare ω



rotazione attorno a P



asse di istantanea rotazione

La velocità angolare della rotazione intorno a P è uguale alla velocità ω della rotazione intorno al centro di massa O (poiché $v_{CM} = \omega r$).

* **L'energia cinetica nel rotolamento:** può essere vista in due modi:

1) **somma dell'energia cinetica di pura rotazione attorno ad O e dell'energia cinetica del moto di traslazione del centro di massa**

$$K = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \quad M \text{ è la massa della ruota}$$

2) **energia cinetica di pura rotazione attorno a P :**

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

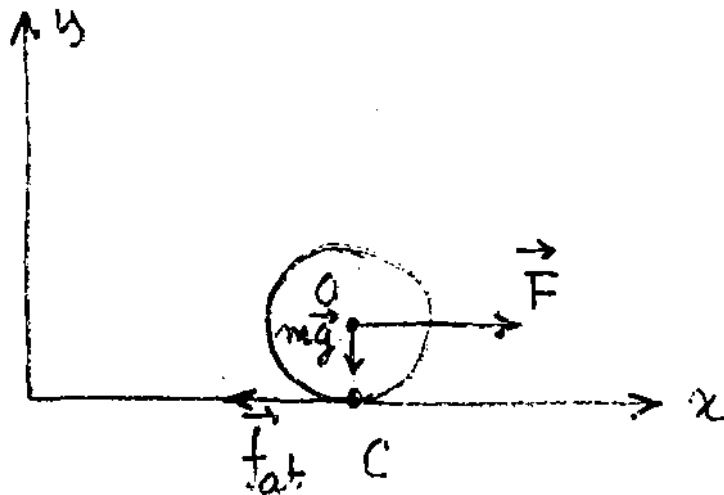
I_O e I_P sono il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse passante per O e P , rispettivamente. Usando il teorema degli assi paralleli $I_P = I_O + Mr^2$, si verifica che le due espressioni sono uguali.

* Dinamica del puro rotolamento

La ruota avanza con velocità $\vec{v}_{CM}$ quindi la velocità del punto di contatto è $\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$: deve esserci una forza che tiene fermo P, si tratta dell'attrito statico $\vec{f}_s$ questa forza non compie lavoro perchè P è fermo.

Rotolamento su un piano

Consideriamo un corpo di massa m che rotola senza strisciare su un piano orizzontale sotto l'azione di una forza costante $\vec{F}$ parallela al piano. Sul corpo agisce la forza peso $m\vec{g}$, la forza $\vec{F}$, la forza normale $\vec{N}$ e la forza di attrito $\vec{f}_s$.



La legge del moto per il centro di massa è

$$\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{f}_s = m\vec{a}_{cm}$$

Proiettandola sugli assi si ha:

$$\begin{cases} F - f_s = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Il momento risultante delle forze $\vec{\tau}$ calcolato rispetto al centro della sfera

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{R} \times \vec{f}_s$$

(tutte le altre forze non contribuiscono alla rotazione). Per la legge del moto rotatorio $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ si ha

$$Rf_s = I\alpha = Ia_{CM}/R$$

dove I è il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse di rotazione che passa per O . Se c'è rotolamento puro $a_{CM} = \alpha R$ e si possono ricavare le due incognite a_{CM} e f_s

$$a_{CM} = \frac{F}{m(1 + \frac{I}{mR^2})} \quad f_s = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

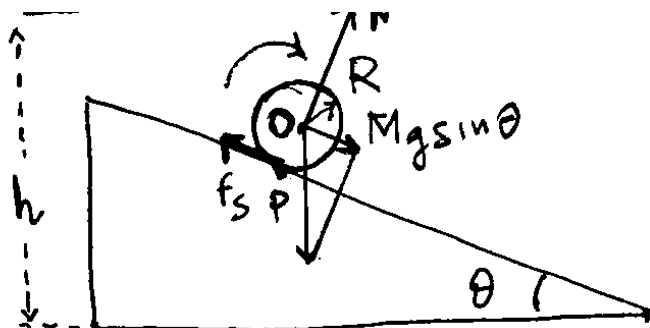
Affinchè si abbia puro rotolamento si deve avere $f_s \leq \mu_s N$ la massima forza di attrito statico $f_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$

$$F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right)$$

Affinchè un corpo ruoti su un piano orizzontale deve essere presente una forza di attrito tra corpo e piano. La forza di attrito tuttavia non compie lavoro perchè il punto di contatto è fermo, quindi l'energia cinetica si conserva. Infatti, non essendoci strisciamento, non c'è variazione dell'energia termica, cioè la superficie oggetto-piano non si riscalda e l'energia cinetica si conserva.

Rotolamento lungo una discesa

Consideriamo ora un cilindro di massa M e raggio R che rotola su un piano inclinato senza strisciare. Prendiamo l'asse x parallelo al piano inclinato; la componente lungo il piano della forza peso è $Mg \sin \theta$. La forza di attrito ha direzione opposta in quando il punto P senza attrito scivolerebbe lungo il piano.



$$\begin{cases} -f_s + Mg \sin \theta = Ma_{CM} \\ N - Mg \cos \theta = 0 \end{cases}$$

la seconda legge di Newton per il moto rotatorio si scrive

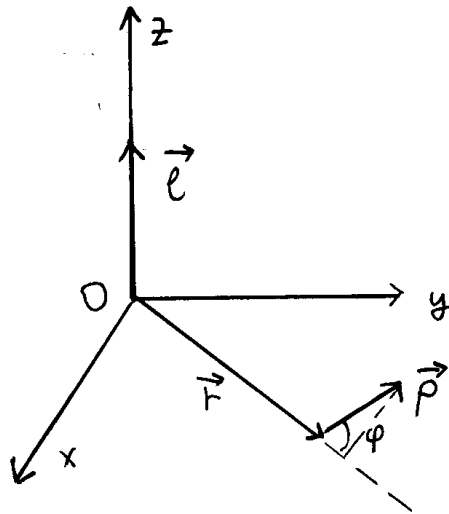
$$\tau_{net} = Rf_s = I\alpha$$

dove I è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse di rotazione passante per centro di massa.

Poichè non si ha strisciamento, $a_{CM} = \alpha R$ (si noti che sono tutte e due positive) e si trova:

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

Momento angolare o momento della quantità di moto



Per un oggetto **puntiforme** di massa m e velocità $\vec{v}$ (quindi quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$) che si trova (istantaneamente) nella posizione individuata dal vettore $\vec{r}$ rispetto all'origine di un sistema di riferimento inerziale, il **momento angolare** è

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La seconda legge di Newton per un corpo puntiforme si può anche scrivere

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

($\vec{v} \times \vec{p} = 0$ in quanto $\vec{v}$ e $\vec{p}$ sono vettori paralleli). $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$ sono calcolati rispetto allo stesso punto O

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau} \quad \text{è l'analogo rotazionale di} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Questo risultato si può estendere a un **sistema di N oggetti puntiformi**

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{net}$$

dove $\vec{\tau}_{net}$ è la somma dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema.

Se $\vec{\tau}_{net} = 0$ il momento angolare totale del sistema si conserva (principio della conservazione del momento angolare per sistemi isolati).

Nel caso di **un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare ω** la componente del momento angolare del corpo rispetto all'asse di rotazione è

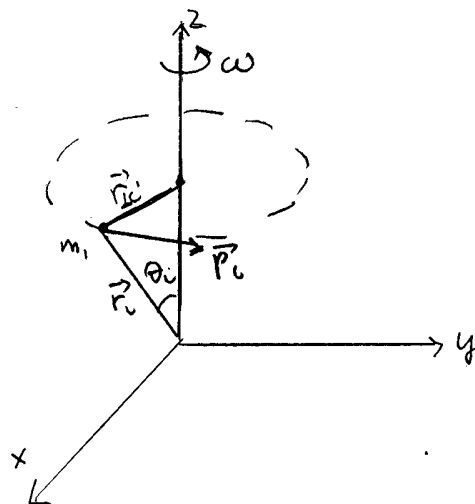
$$L = I\omega$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto a quell'asse.

Il singolo volumetto di massa m_i e posizione $\vec{r}_i$ contribuisce al momento angolare con

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp i}) = m_i r_{\perp i}^2 \vec{\omega} + \vec{l}_{\perp i}$$

La somma su tutti i volumetti di $m_i r_{\perp i}^2$ dà il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.



In generale $\vec{L}$ non è parallelo all'asse di rotazione e quando non lo è $\vec{L}$ ruota attorno all'asse di rotazione assieme al corpo (**moto di precessione**).

Nel caso più semplice in cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

Ma per il corpo rigido si ha anche $\vec{\tau}_{net} = I_z \vec{\alpha}$, quindi la **seconda legge di Newton per il corpo rigido** si può riscrivere

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{net}$$

Nel caso in cui $\vec{L}$ non sia parallelo a ω , questa relazione vale solo per la sua componente lungo l'asse di rotazione.

Per una particella: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ se $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{l}_i = \vec{l}_f$

il momento angolare della particella si conserva (sistema isolato).

Per un sistema di particelle se $\sum \vec{\tau}_i^{ext} = 0$ rispetto a un certo polo O, il momento angolare totale rispetto a quel polo si conserva: ω_z e I_z possono variare ma il loro prodotto rimane costante (esempio la pattinatrice quando allarga le braccia aumenta il suo momento di inerzia e diminuisce la velocità angolare, mentre quando si rannicchia succede il contrario).

Confronto tra le formule che regolano il moto di traslazione pura e di rotazione attorno ad un asse fisso.

	traslazione		rotazione
posizione	x	posizione angolare	θ
velocità	$v = dx/dt$	velocità angolare	$\omega = d\theta/dt$
accelerazione	$a = dv/dt$	accelerazione angolare	$\alpha = d\omega/dt$
massa	M	momento d'inerzia	I
legge di Newton	$F_{net} = Ma$	legge di Newton	$\tau_{net} = I\alpha$
lavoro	$W = \int F dx$	lavoro	$W = \int \tau d\theta$
energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$	energia cinetica	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
potenza	$P = Fv$	potenza	$P = \tau\omega$
th. en. cinetica	$W = \Delta K$	th. en. cinetica	$W = \Delta K$
forza	$\vec{F}$	momento della forza	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
quantità di moto	$\vec{p}$	momento angolare	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$
quantità di moto	$\vec{P} = \sum \vec{p}_i$	momento angolare	$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$
quantità di moto	$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$	momento angolare	$L = I\omega$
legge di Newton	$\vec{F}_{net} = d\vec{P}/dt$	legge di Newton	$\vec{\tau}_{net} = d\vec{L}/dt$
legge di conservazione	$\vec{P} = cost$	legge di conservazione	$\vec{L} = cost$