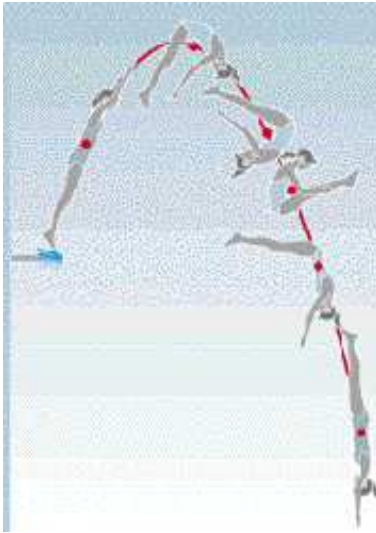


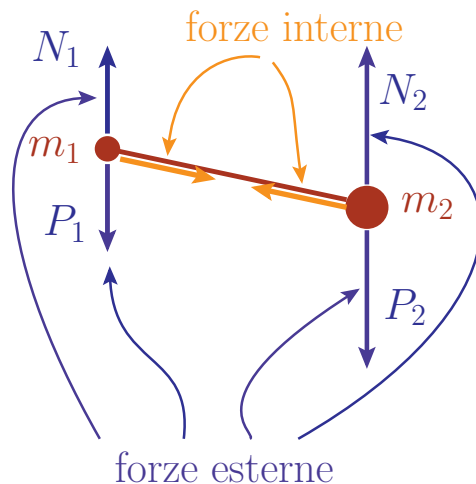
Sistemi di punti materiali

Il moto di un corpo esteso è più complicato di quello di un punto materiale.



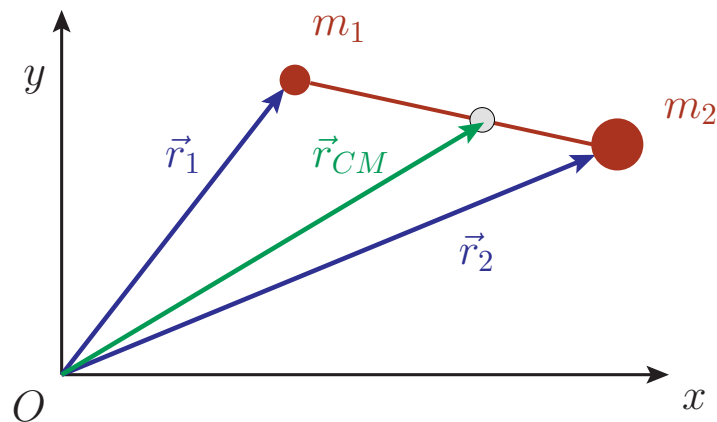
Es.: in un tuffo dal trampolino di una persona, un punto, il **centro di massa** (CM), si muove di moto parabolico, il resto del corpo si muove di moto rotatorio attorno al CM.

Es.: il moto del centro di massa dei frammenti di un fuoco artificiale che esplode in volo segue la traiettoria parabolica che seguirebbe il proiettile se non esplodesse (trascurando l'attrito e fino a quando alcuni frammenti cominciano ad arrivare a terra).



Come primo caso consideriamo un sistema di due oggetti di massa m_1 e m_2 puntiformi posti nel piano orizzontale e collegate da una sbarra rigida di massa trascurabile massa.

Sul sistema agiscono forze esterne e forze interne (quelle di trazione della sbarra).



Siano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ le posizioni di m_1 e m_2 in un dato sistema di riferimento $Oxyz$.

La posizione del **centro di massa** è data dal vettore

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

di componenti

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

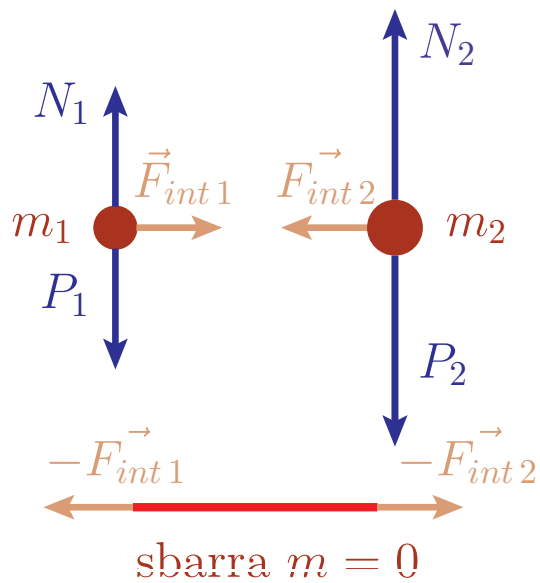
Il moto del centro di massa:

velocità del CM:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

velocità del CM:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$



Risultante delle forze

su m_1 $\vec{F}_{tot1} = \vec{N}_1 + \vec{P}_1 + \vec{F}_{int1} = \vec{F}_{int1}$

su m_2 $\vec{F}_{tot2} = \vec{N}_2 + \vec{P}_2 + \vec{F}_{int2} = \vec{F}_{int2}$

sulla sbarra $\vec{F}_{tot, sb} = -\vec{F}_{int1} - \vec{F}_{int2}$

(abbiamo usato il fatto che siamo su un piano orizzontale e la III legge di Newton).

La legge di Newton per m_1 e m_2

$$\vec{F}_{int1} = m_1 \vec{a}_1 \quad \vec{F}_{int2} = m_2 \vec{a}_2 \quad (*)$$

per la sbarra è:

$\vec{F}_{tot, sb} = 0$ perchè la massa della sbarra è nulla

quindi $\vec{F}_{int1} = -\vec{F}_{int2}$. Sommando le due equazioni in (*) si ottiene

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{int1} + \vec{F}_{int2} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme!

Nota in questo sistema $\sum_k \vec{F}_k^{ext} = 0$.

Se ci fossero state forze esterne (es. una fune che tira una massa)

$$\sum_k \vec{F}_k^{ext} = (m_1 + m_2) \vec{a}_{CM}$$

Per la III legge della dinamica le forze interne si cancellano nella somma.

* **Quantità di moto:** di una massa m (puntiforme) con velocità $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$

La II legge di Newton si scrive

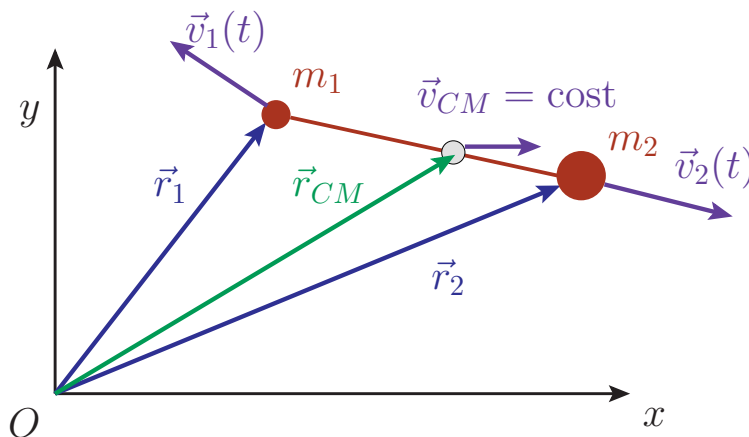
$$\sum_k \vec{F}_k = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{Se } \sum_k \vec{F}_k = 0, \text{ la quantità di moto è costante.}$$

* Per il sistema di due particelle $\vec{P}$ totale:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = (m_1 + m_2)\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM} = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

* **Conservazione di $\vec{P}$**



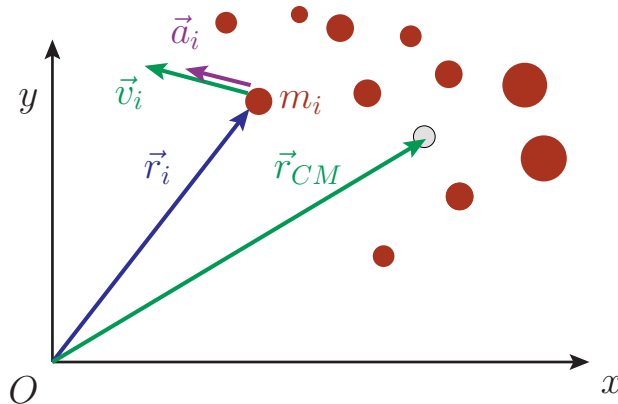
Se

$$\sum_k \vec{F}_k^{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cost$$

la quantità di moto totale si conserva:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

* Sistema di N particelle



M è la massa totale $M = \sum_i m_i$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_N \vec{v}_N}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_N \vec{a}_N}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

la II legge di Newton per l' i -sima particella

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}^{(i)} = \sum_k \vec{F}_k^{ext(i)} + \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ji}$$

la prima sommatoria è su tutte le forze esterne, la seconda somma tutte le forze interne sul corpo i cioè le forze $\vec{F}_{ji}$ con cui gli altri corpi agiscono su i . Sommando su tutte le particelle

$$M \vec{a}_{CM} = m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_N \vec{a}_N = \vec{F}^{(1)} + \dots + \vec{F}^{(N)} = \sum_k \vec{F}_k^{ext(1)} + \dots + \sum_k \vec{F}_k^{ext(N)}$$

nella somma le forze interne si cancellano perchè $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

* II legge di Newton per un sistema di particelle

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_n \vec{F}_n^{ext} \quad \text{di tutte le forze esterne}$$

Il sistema nel suo insieme si muove se fosse un'unica massa M , posta nel centro di massa, a cui è applicata la risultante di tutte le forze esterne.

In particolare se $\sum_n \vec{F}_n^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$

il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.

* Conservazione della quantità di moto per un sistema di N particelle

La quantità di moto totale del sistema:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

Assumendo M costante:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M \vec{a}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

che è la seconda legge della meccanica generalizzata a un sistema di punti materiali. Se la risultante delle forze esterne è nulla $\vec{P} = \text{costante}$ cioè

$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin}$ la quantità di moto totale si conserva.

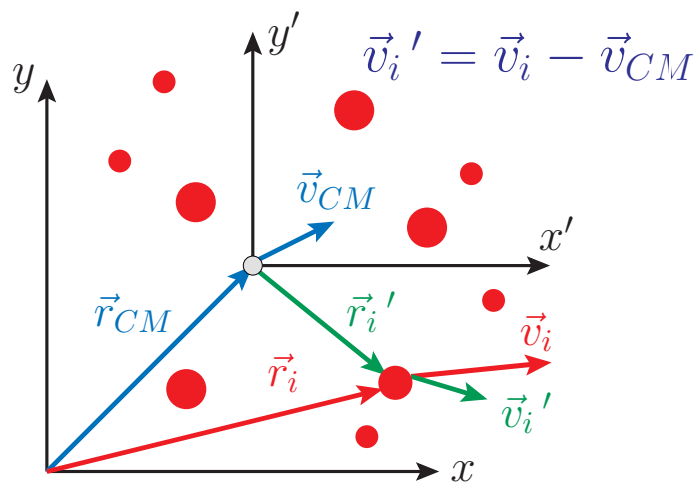
Questa è un'equazione vettoriale, quindi se una componente lungo uno degli assi coordinati della forza totale esterna agente su un sistema è nulla, la componente della quantità di moto lungo quell'asse si conserva.

* Esempio: calcolo della velocità di rinculo di un cannone dopo lo sparo (orizzontale). $\vec{N}$ e $\vec{P} = 0$ agiscono lungo la verticale e si cancellano. Se non ci sono attriti sul sistema non ci sono forze esterne, quindi P è costante inoltre prima dello sparo il cannone è fermo: $P_{in} = 0$. Subito dopo lo sparo P è ancora nullo: $mv + MV = 0$, con m e v massa e velocità del proiettile (M e V quelle del cannone): $V = -\frac{m}{M}v$, se il proiettile si muove nel verso delle x positive la velocità di rinculo del cannone è nel verso delle x negative.

* Esempio: l'esplosione in aria di un fuoco d'artificio: dopo l'esplosione i singoli frammenti eseguono traiettorie complicate ma il centro di massa percorre un moto parabolico, come quello del proiettile, perchè in tutti e due i casi la forza esterna è $\vec{P}$.

* Sistema di riferimento del centro di massa

È un sistema solidale con il centro di massa, quindi in esso $\vec{v}'_{CM} = 0$. Vediamo che in questo sistema di riferimento **la quantità di moto totale si annulla**. In generale non è un sistema inerziale.



$$\begin{aligned}\vec{P}' &= \sum_{i=1}^N \vec{p}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{CM} \\ &= M \vec{v}_{CM} - \vec{v}_{CM} \sum_{i=1}^N m_i = 0\end{aligned}$$

$$M \vec{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = \vec{P}' = 0$$

* Lavoro delle forze su un sistema di particelle

Il teorema dell'energia cinetica continua a valere: $\Delta K = W$.

W è il lavoro totale fatto sul sistema da tutte le forze: $W = W^{int} + W^{ext}$.

In generale $W^{int} \neq 0$ (infatti $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ma gli spostamenti di m_i e m_j sono diversi).

★ **Teorema di Koenig per l'energia cinetica:** mette in relazione l'energia cinetica totale in un dato sistema di riferimento con quella misurata nel sistema del CM.

$$K_{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 \right]$$

= en. cinetica nel sistema del CM + en. cinetica del moto del CM

★ **Conservazione dell'energia meccanica**

Se $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ (**sistema isolato**), le forze interne possono svolgere un lavoro e far variare la configurazione del sistema

$$\Delta K = W^{int}$$

se le forze interne sono conservative si ha anche

$$W^{int} = -\Delta U$$

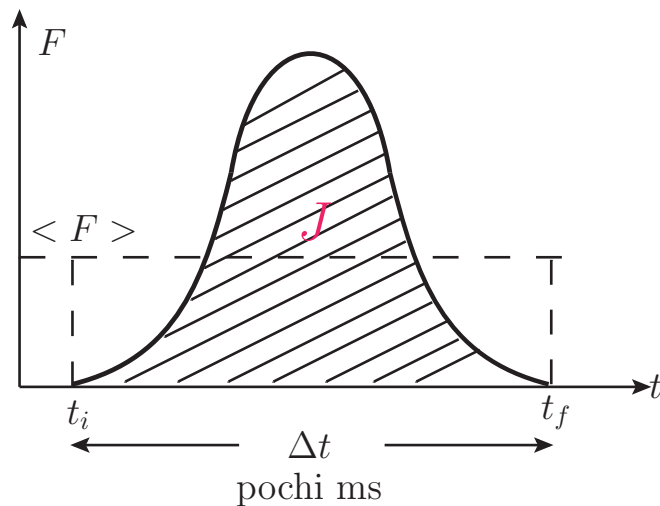
e l'energia meccanica totale $E_{tot} = K_{tot} + U_{tot}$ è costante.

Posizione e velocità dei singoli componenti del sistema variano ma l'energia meccanica totale è costante.

Se ad un oggetto viene applicata una forza per un intervallo di tempo infinitesimo dt la sua quantità di moto varia della quantità infinitesima $d\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow d\vec{p} = \vec{F} dt$$

* Impulso di una forza



Se la forza è applicata per un intervallo di tempo finito $t_f - t_i$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in}$$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \quad \text{impulso della forza } \vec{F}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

l'impulso di una forza che agisce su un oggetto è uguale alla variazione della quantità di moto dell'oggetto.

Per forze molto intense e di breve durata $\vec{J} = \langle \vec{F} \rangle \Delta t$.

Le dimensioni dell'impulso sono quelle di una forza per un tempo e quindi la sua unità di misura è Newton · secondi

Per un **sistema di punti materiali** la variazione della quantità di moto totale del sistema è uguale all'impulso totale delle forze esterne

$$\vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in} = \int d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext} dt = \vec{J}_{ext}$$

* Urti e principi di conservazione

Durante un urto due o più corpi entrano in contatto per un intervallo di tempo molto breve e sotto l'azione di una forza interna molto intensa.

Forze impulsive: forze agenti per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione del sistema: le forze che intervengono durante un urto sono forze impulsive.

In un fenomeno d'urto almeno uno dei corpi è in moto e quindi il sistema possiede una certa energia e una certa quantità di moto.

Vogliamo studiare come queste quantità cambiano dopo l'urto.

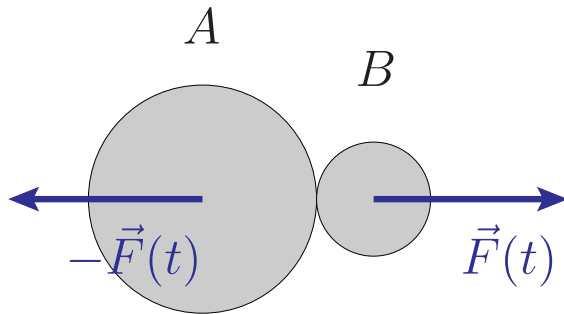
Durante l'urto a causa del brevissimo tempo di interazione l'impulso delle forze esterne si può trascurare:

$$\vec{J}^{est} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}^{est} dt = \langle \vec{F}_{ext} \rangle \tau \simeq 0 \quad \text{per } \tau \rightarrow 0$$

quindi **la quantità di moto totale del sistema si conserva:** è uguale a prima e dopo l'urto. Non possiamo invece assumere che l'energia meccanica si conservi: dipende se le forze interne sono conservative o no.

* Urti tra due particelle

Durante l'urto il corpo A esercita su B la forza $\vec{F}(t)$ e B esercita su A la forza $-\vec{F}(t)$: la loro intensità varia nel tempo ma istante per istante le due forze sono uguali ed opposte.



Queste forze fanno variare la quantità di moto dei corpi su cui agiscono:

$$\text{per il corpo B si ha} \quad d\vec{p}_B = \vec{F}(t)dt$$

$$\text{per il corpo B si ha} \quad d\vec{p}_B = \vec{F}(t)dt$$

Integrando queste relazioni da un tempo iniziale t_i (subito prima della collisione) a un tempo finale t_f (subito dopo la collisione) si ha

$$\vec{p}_{B,f} - \vec{p}_{B,i} = \int d\vec{p}_B = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{J}$$

$$\vec{p}_{A,f} - \vec{p}_{A,i} = \int_{t_i}^{t_f} (-\vec{F}) dt = -\vec{J} \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{B,f} - \vec{p}_{B,i} = -(\vec{p}_{A,f} - \vec{p}_{A,i}) \Rightarrow \vec{p}_{A,f} + \vec{p}_{B,f} = \vec{p}_{A,i} + \vec{p}_{B,i}$$

la quantità di moto totale si conserva.

NB: si può trascurare l'impulso delle forze esterne perchè l'urto dura un tempo molto piccolo e le forze esterne non sono impulsive.

* **Urto elastico:** le nell'urto si generano forze impulsive conservative e la variazione dell'energia potenziale elastica durante la fase di compressione si trasforma in energia cinetica nella fase di rilascio e non si ha dissipazione di energia: **l'energia meccanica prima e dopo l'urto è la stessa.**

* **Urto anelastico:** quando una parte dell'energia meccanica iniziale del sistema (o tutta) viene dissipata nell'urto: **l'energia meccanica non si conserva.**

* **Urto completamente anelastico:** dopo l'urto i due corpi restano attaccati formando un unico corpo: l'energia spesa per deformare i due corpi non viene più recuperata e l'energia meccanica non si conserva.

* **Urto completamente anelastico di due particelle:**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_f = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

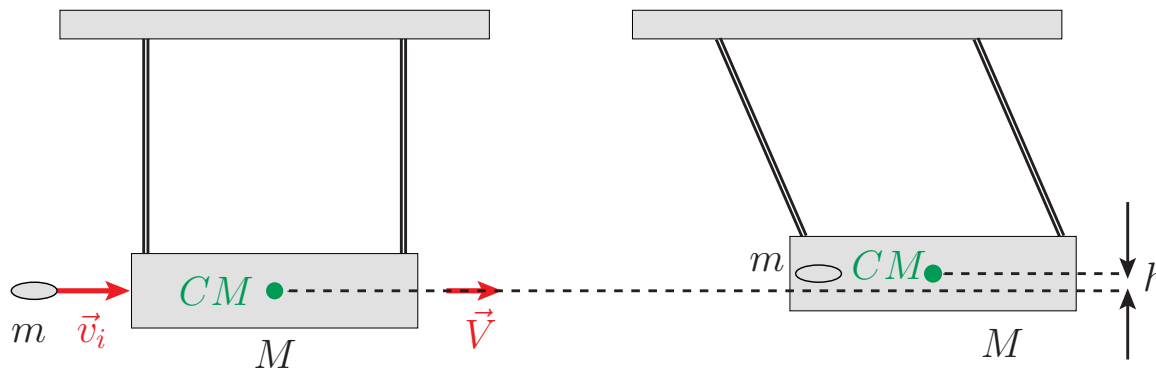
dopo l'urto le due masse si muovono unite con la velocità del CM (che è costante e quindi uguale a quella del CM prima dell'urto).

$$K_i = K'_i + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 \qquad K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$$

K'_i è l'energia cinetica iniziale nel sistema di riferimento del CM è pari all'energia assorbita nell'urto.

* **Pendolo balistico:** si tratta di un dispositivo per misurare la velocità di un proiettile. È formato da un blocco di legno di massa M sospeso a due lunghe funi. Un proiettile di massa m e velocità orizzontale v_i è sparato contro il blocco e vi si conficca. Dopo l'urto il blocco oscilla e si alza di un tratto h sopra il livello iniziale.

L'urto avviene in un tempo così breve che l'impulso delle forze esterne (peso e tensione delle funi) è trascurabile e la quantità di moto totale si conserva. L'urto è completamente anelastico



$$V = \frac{m}{m + M} v_i \quad (*)$$

Dopo l'urto ci sono solo forze conservative: l'energia meccanica si conserva

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 + 0 = 0 + (m + M)gh \quad \rightarrow \quad V^2 = 2gh$$

Utilizzando (*) si trova la velocità iniziale del proiettile

$$v_i = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

* **Urto elastico frontale**: i due corpi che si urtano si muovono lungo una retta (le velocità sono positive o negative a seconda del verso)



conservazione della quantità di moto $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$

conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$

(l'energia potenziale non compare perchè è la stessa prima e dopo l'urto).
Soluzione:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Casi particolari:

* $m_1 = m_2 \Rightarrow v'_1 = v_2 \quad v'_2 = v_1$

i due corpi si scambiano le velocità: se il corpo 2 era fermo prima dell'urto, dopo l'urto il corpo 1 si ferma e il corpo 2 parte con la velocità del corpo che l'ha colpito.

* **bersaglio fisso:** (es. $v_2 = 0$)

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

se $m_1 > m_2$ dopo l'urto il proiettile continua il suo moto nel verso positivo, altrimenti torna indietro.

Possiamo considerare due sottocasi:

☆ $m_2 \gg m_1$ (bersaglio massiccio)

$$v'_1 \approx -v_1 \quad v'_2 \approx \frac{2m_1}{m_2} v_1$$

il proiettile praticamente rimbalza e inverte la sua velocità mentre il bersaglio si mette in moto con una piccola velocità (perchè $m_1/m_2 \ll 1$).

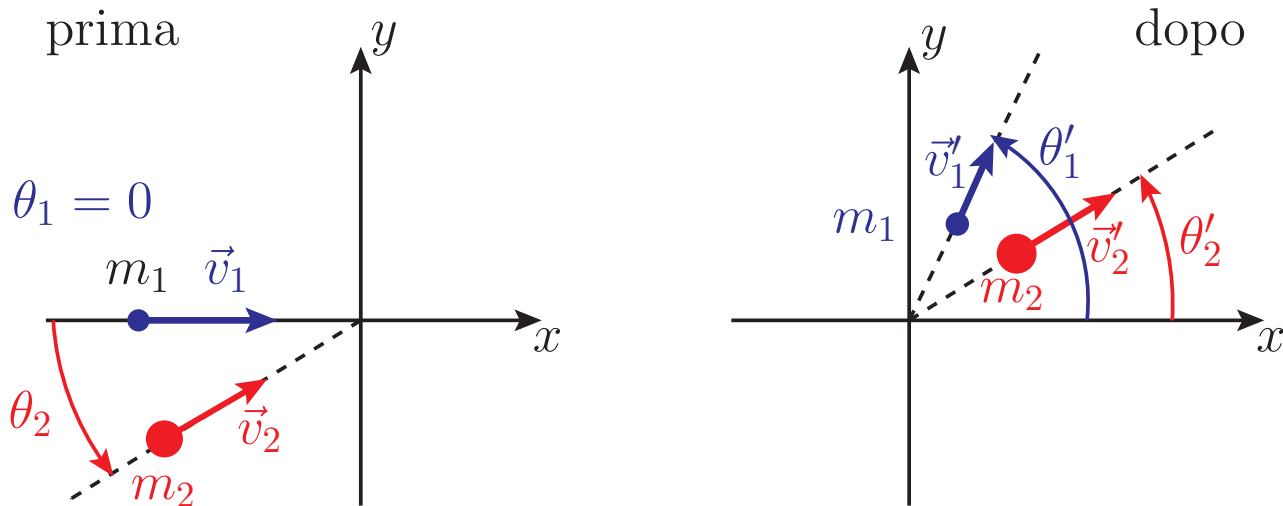
Nel limite $m_2 \rightarrow \infty$, urto contro una parete ferma, $v'_1 = -v_1$ e $v'_2 = 0$.

☆ $m_1 \gg m_2$ (proiettile massiccio)

$$v'_1 \approx v_1 \quad v'_2 \approx 2v_1$$

il proiettile prosegue praticamente indisturbato nel suo moto in avanti mentre il bersaglio scatta in avanti con una velocità doppia di quella del proiettile.

Urto elastico in due dimensioni



Se si conosce lo stato prima dell'urto quindi v_1 , v_2 , θ_1 e θ_2 (o le due componenti dei due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$), la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

danno 3 equazioni per le 4 incognite v'_1 , v'_2 , θ'_1 e θ'_2 , quindi occorre misurare anche una delle quantità finali per avere tutte le altre.