

Forza e moto: le leggi della dinamica

Newton: se la velocità di un corpo cambia, in modulo o in direzione, qualcosa deve aver causato questo cambiamento, cioè deve aver causato l'accelerazione del corpo.

Questa interazione che imprime un'accelerazione a un corpo è detta **forza**.

In fisica **la quiete o il moto rettilineo uniforme sono condizioni naturali degli oggetti** e per indurre un cambiamento nel moto dell'oggetto sono necessarie delle interazioni con altri oggetti. **La forza è quell'azione, causata da un agente esterno al corpo, che provoca una variazione della velocità del corpo** (o come intensità o come direzione) e quindi il corpo acquista un'accelerazione.

Il metodo più semplice per definire operativamente una forza è basato sugli effetti dinamici che essa produce.

Fissato un oggetto A, una forza ha un'intensità uguale (doppia, ecc.) ad un'altra quando le accelerazioni prodotte sono uguali (doppie, ecc.).

Supponendo che A sia il corpo campione, **dalla misura delle accelerazioni si determina la misura delle forze**.

Supponiamo ora di far agire la **stessa forza** su oggetti puntiformi diversi. Dati due corpi qualsiasi, diremo che hanno la **stessa massa** quando spinti da una stessa forza acquistano la **stessa accelerazione** e che un corpo ha massa doppia di un altro quando, spinto dalla stessa forza, acquista un'accelerazione pari alla metà dell'accelerazione del primo corpo, ecc.

La massa di un corpo è un'osservabile scalare, inversamente proporzionale al modulo dell'accelerazione impressa al corpo da una forza stabilita

$$m \sim \frac{1}{a}$$

dati due corpi si ha

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Questa definizione permette di costruire una scala delle masse indipendentemente dalla natura dei corpi.

La massa di un corpo è la caratteristica che mette in relazione la forza applicata al corpo con l'accelerazione che ne risulta.

La massa rappresenta la proprietà dei corpi di opporsi al moto e per questo è detta anche “**massa inerziale**”.

Leggi fondamentali della dinamica

Principio di inerzia (1^a legge della dinamica)

Ogni corpo continua nel suo stato di riposo o di moto uniforme lungo una linea retta fino a quando non è costretto a mutare il suo stato da forze esercitate su di esso.

Nota: l'affermazione sottintende che ci si riferisce allo stato di moto rispetto a un sistema inerziale.

2^a legge della dinamica

Il cambiamento nel moto è proporzionale alla forza impressa e avviene nella direzione della retta in cui la forza è applicata

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

N.B.: La formulazione più precisa è quella di intendere per cambiamento del moto la derivata del prodotto $m\vec{v}$. Le due formulazioni coincidono solo quando la massa è costante durante il moto.

La 1^a legge sembra implicita nella 2^a: in realtà la 1^a consente di definire i sistemi di riferimento inerziali in cui vale la 2^a.

$\vec{F} = m\vec{a}$ è una relazione vettoriale: l'accelerazione ha sempre la stessa direzione e lo stesso verso della forza che la induce.

Dimensioni: $[F] = [M][LT^{-2}]$

Unità di misura: nel S.I. la forza si misura in Newton: $1 N = 1 Kg m s^{-2}$

nel sistema c.g.s. in dine $1 dyn = 1 g cm s^{-2}$

→ 1 N è la forza che imprime ad un corpo di massa pari a 1 kg un'accelerazione di $1 m/s^2$

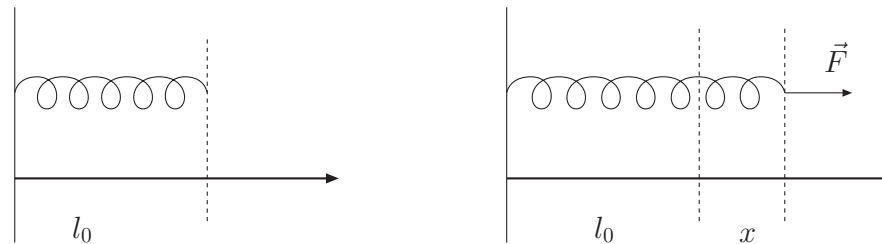
→ 1 dyn è la forza che imprime a 1 g un'accelerazione di $1 cm/s^2 \Rightarrow$
 $1 dine = 10^{-5} N$

Critica delle leggi di Newton: il lancio di un oggetto nell'esperienza quotidiana porta sempre all'arresto del moto dell'oggetto, ossia nella nostra esperienza quotidiana è richiesta una forza per mantenere in moto qualunque corpo (es. un pallone da calcio, un carrello,...).

La risposta, che era già in Galileo, è che la perdita di velocità è dovuta alla presenza di **attrito che costituisce una forza che si oppone al movimento**. In effetti se ci mettiamo in condizioni di ridurre l'attrito (pattini su di una superficie ghiacciata, moto su cuscinetti di ghiaccio secco, ecc.) si può facilmente constatare che il moto si mantiene molto più a lungo e si è autorizzati ad estrapolare le conclusioni riguardo cosa succede in totale mancanza di attrito.

Come si misurano le forze

Uno strumento per misurare le forze è il **dinamometro**, formato da una molla attaccata a un sostegno. La molla è un oggetto ideale che se allungata o compressa di un tratto $\vec{x}$ rispetto alla posizione di equilibrio reagisce con una forza pari a $\vec{F} = -k\vec{x}$ dove k è una costante, detta costante elastica della molla (il segno meno sta a indicare che la forza ha sempre verso opposto a quello dello spostamento, cioè tende a riportare la molla nella posizione di equilibrio). Per misurare una forza incognita $\vec{F}$, prima si applica al dinamometro la forza unitaria $\vec{F}_0$ e si misura



l'allungamento x_0 della molla, che sarà tale che $F_0 = kx_0$. Poi si applica alla molla la forza incognita $\vec{F}$ e si misura l'allungamento corrispondente che indichiamo con x e che sarà tale che $F = kx$ da cui

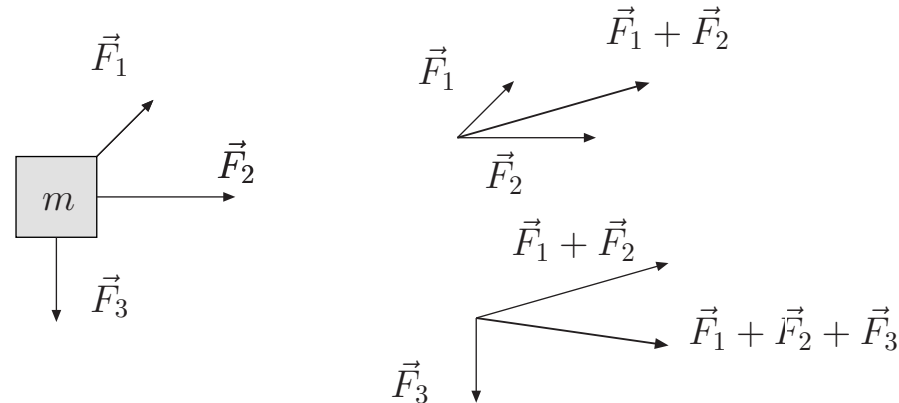
$$\frac{F}{F_0} = \frac{kx}{kx_0} \rightarrow F = F_0 \frac{x}{x_0}$$

la misura dell'allungamento permette di misurare la forza F .

Quando su di un corpo puntiforme di massa m agiscono simultaneamente più forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots, \vec{F}_k$, esso si comporta come se su di esso agisse la loro **risultante** $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k$ (cioè la somma vettoriale di tutte le forze agenti). Il corpo quindi subisce un'accelerazione nella direzione della risultante $\vec{F}$ e di intensità pari a $a = F/m$.

Quando la risultante di più forze applicate ad un oggetto puntiforme è nulla lo stato di moto dell'oggetto non cambia (in particolare se l'oggetto è inizialmente fermo rimane fermo).

Esempio: in figura al corpo di massa m sono applicate tre forze e la risultante è stata determinata graficamente mediante la regola del parallelogramma:



la direzione dell'accelerazione del corpo è quella del vettore $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

La legge $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ è un'equazione vettoriale e può essere proiettata sugli assi del sistema di riferimento:

$$\sum_i F_{ix} = ma_x, \quad \sum_i F_{iy} = ma_y, \quad \sum_i F_{iz} = ma_z.$$

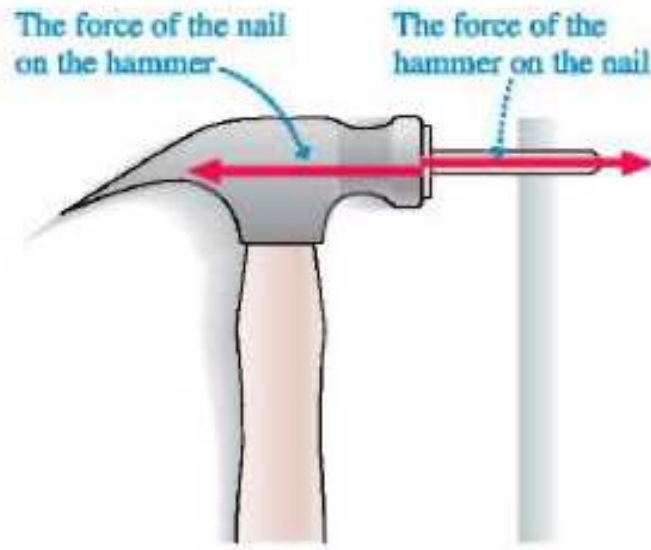
È un sistema di tre equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_i F_{ix} &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{1}{m} \sum_i F_{iy} &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{1}{m} \sum_i F_{iz} &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

con (x, y, z) le componenti del vettore $\vec{r}$ che individua la posizione del corpo.

Il problema generale della dinamica del punto si può riassumere così: **data una forza, comunque variabile nel tempo, applicata ad un corpo, trovarne il suo moto. Viceversa, dato il moto di un corpo cercare una forza capace di determinarlo.**

Terza legge di Newton



Le forze si manifestano a coppie: se colpiamo un chiodo con un martello, il chiodo risponde spingendo in senso opposto contro il martello.

Consideriamo due corpi A e B che interagiscono, ossia ciascuno di essi esercita una forza sull'altro.

Se il corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ sul corpo B, il corpo B esercita una forza $\vec{F}_{BA}$ sul corpo A.

La terza legge di Newton dice che le due forze hanno la stessa intensità, la stessa direzione e verso opposto:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad 3^a \text{ legge di Newton}$$

Si usa dire che ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria. Si noti però che **le due forze agiscono su corpi diversi**.

La forza esercitata dal martello sul chiodo (azione) è uguale ed opposta alla forza che il chiodo esercita sul martello (reazione).

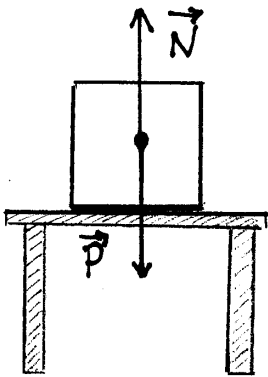
Alcune forze

☆ **Forza peso:** il peso di un corpo è la forza con cui il corpo stesso è attirato verso il centro della terra. La forza è dovuta all'attrazione gravitazionale che si esercita fra le masse dei corpi

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

La forza peso, come $\vec{g}$, è un vettore diretto verso il basso ($\vec{g} = -|\vec{g}|\hat{j}$, con il verso positivo dell'asse y verso l'alto). È una forza che agisce sul corpo indipendentemente dal suo stato di moto.

☆ **Forza normale:** in generale quando un corpo preme su di una superficie,

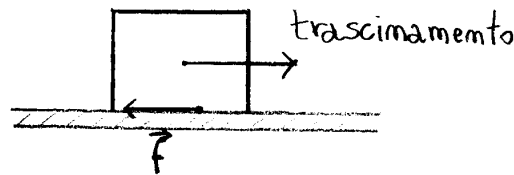


la superficie si deforma e spinge il corpo con una forza normale $\vec{N}$, perpendicolare alla superficie stessa. Questa forza è presente anche quando la superficie a cui si appoggia il corpo è rigida.

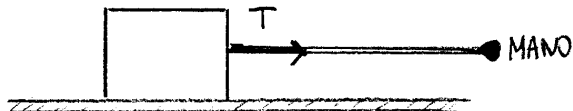
Consideriamo un corpo in stato di quiete appoggiato su di una superficie orizzontale, ad esempio un tavolo: il corpo è soggetto ad una forza $\vec{N}$, la forza normale, che equilibra il peso:

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} = -\vec{P} = -m\vec{g} \quad (\text{diretta verso l'alto})$$

☆ **Attrito**: Se facciamo scivolare un corpo sopra una superficie si nota una resistenza tra corpo e superficie, detta forza di attrito o semplicemente attrito. La forza di attrito agisce parallelamente alla superficie di contatto ed ha verso opposto alla forza di trascinamento.



☆ **Tensione**: Quando un filo (o una fune o un cavo) è fissato ad un corpo ed è tirato, si dice che è sotto **tensione**. Il filo esercita sul corpo una forza di trazione $\vec{T}$, applicata al punto di fissaggio e diretta lungo il filo nel verso di allontanamento dal corpo.



☆ **Forza esercitata da una molla**: La forza esercitata da una molla è chiamata **forza di richiamo** ed è proporzionale allo spostamento del corpo libero dalla posizione di riposo

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad \text{Legge di Hooke}$$

Moto di caduta libera

Il moto dei corpi che vengono lasciati cadere dall'alto (o che vengono lanciati verso l'alto) è caratterizzato dall'accelerazione g , detta **accelerazione di gravità**. Essa è indipendente dalle caratteristiche del corpo, quali la massa, la forma, la densità, e ha un valore pari a 9.8 m/s^2 . La causa di questa accelerazione va ricercata nella forza di attrazione gravitazionale che si esercita tra i corpi: **ogni corpo viene attratto verso il centro della terra dalla forza gravitazionale**

$$\vec{F} = \frac{GM_T m}{r^2} \hat{r}$$

G =costante universale, M_T = massa della terra, m = massa del corpo, r = distanza tra il corpo e il centro della terra, $\hat{r}$ è il versore della congiungente il corpo e il centro della terra.

Per la 2^a legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, il corpo ha un'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{GM_T}{r^2} \hat{r} \simeq \frac{GM_T}{R_T^2} \hat{r}$$

dove si è approssimato $r = h + R_T \simeq R_T$, visto che in generale l'altezza h del corpo rispetto al suolo è molto minore del raggio della terra R_T . Quindi

$$a \simeq \frac{GM_T}{R_T^2} = g$$

Il principio di azione reazione

Un blocco di massa m posto ad una distanza h dal suolo sente una forza

$$F_1 = G \frac{M_T m}{R^2}$$

con $R = h + R_T$. L'accelerazione del blocco si ricava da

$$F_1 = m a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{G M_T}{R^2}$$

Per il principio di azione reazione sulla terra agisce una forza $\vec{F}_2$

uguale in modulo ma di verso opposto a $\vec{F}_1$ $F_2 = F_1 = G \frac{M_T m}{R^2}$

l'accelerazione della terra si ricava da: $F_2 = M_T a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{G m}{R^2}$

Valori numerici:

$$R \simeq R_T = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \text{ kg}),$$

$$a_1 \simeq g = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad a_2 = \frac{6.67 \times 10^{-11}}{(6.4)^2 \times 10^{12}} m(\text{kg}) = 1.6 \times 10^{-24} m(\text{kg}) \text{ m/s}^2$$

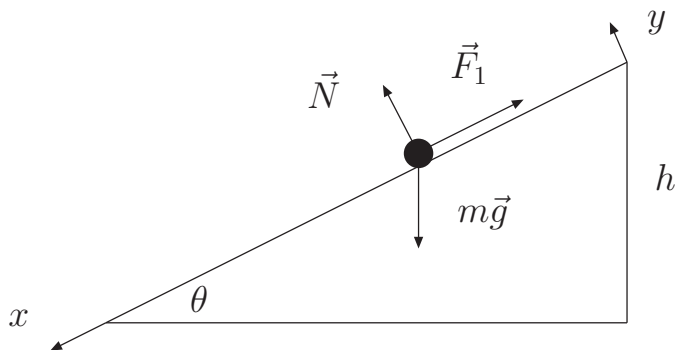
dove $m(\text{kg})$ è il valore numerico della massa espresso in kilogrammi.

In altre parole

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m}{M_T} = \frac{m(\text{kg})}{6} 10^{-24}$$

Esempio: il piano inclinato

Un blocco di massa m è tenuto fermo su un piano inclinato da una fune



$\vec{F}_1$ = tensione della fune

$m\vec{g}$ = forza peso

$\vec{N}$ = forza normale

Il blocco è a riposo $\iff \vec{a} = 0 \Rightarrow$
 $\vec{F}_1 + \vec{N} + m\vec{g} = 0.$

Prendiamo il riferimento in modo tale che l'asse x sia diretta lungo il piano inclinato, verso il basso, l'asse y ad esso perpendicolare

$$\text{componente } x: \quad -F_1 + mg \sin \theta = 0$$

$$\text{componente } y: \quad N - mg \cos \theta = 0$$

noti m e θ si possono trovare N e F_1 , cioè la forza normale e la forza esercitata dalla fune affinché il blocco stia fermo.

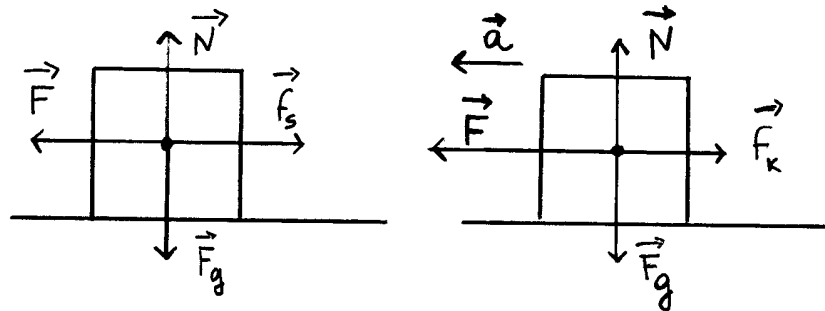
Caso dinamico: se si taglia il filo, quindi $\vec{F}_1 = 0$, il blocco non è più in equilibrio ed inizia a scendere lungo il piano (che supponiamo senza attrito) con accelerazione costante. Infatti dalla 2^a legge della dinamica

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} ma_x = mg \sin \theta & \rightarrow a_x = g \sin \theta \\ ma_y = N - mg \cos \theta = 0 & \text{non c'è moto lungo l'asse } y \end{cases}$$

Forze di attrito

Se lanciamo un blocco su di un tavolo con una velocità $\vec{v}_0$ osserviamo che dopo un po' si ferma. Quindi l'accelerazione del blocco è diversa da zero e ha verso opposto a quello della velocità. Poichè all'accelerazione si associa una forza, il blocco è sottoposto ad una forza parallela alla superficie del tavolo e verso opposto alla velocità, detta **forza di attrito dinamico**.

Supponiamo di avere un blocco fermo e di spingerlo con una certa forza, inizialmente il blocco non si mette in moto: questo è dovuto alla presenza di una forza di attrito che equilibra la nostra forza. Questa forza di attrito è detta **forza di attrito statico** $\vec{f}_s$. Se aumentiamo la forza con cui spingiamo, il blocco inizia a muoversi, questo significa che la forza di attrito statico ha un massimo di intensità.



Di solito la forza di attrito dinamico è minore del massimo valore che può raggiungere la forza di attrito statico.

L'attrito è dovuto all'effetto collettivo delle forze che si esercitano tra gli atomi delle due superfici a contatto: a livello microscopico solo alcuni punti delle due superfici sono a contatto, quando sotto l'azione della forza esterna il corpo inizia a muoversi, la forza di attrito si riduce perchè i punti di contatto variano istante per istante ed è più facile separarli.

Il massimo valore dell'intensità della forza di attrito statico è

$$f_{s,max} = \mu_s N$$

dove μ_s è il **coefficiente di attrito statico** e N è il modulo della forza normale. Se al corpo viene applicata una forza esterna la cui componente parallela alla superficie è $F < f_{s,max}$ il corpo non si muove.

Quando il corpo comincia a scivolare lungo la superficie, la forza di attrito è data da

$$f_k = \mu_k N$$

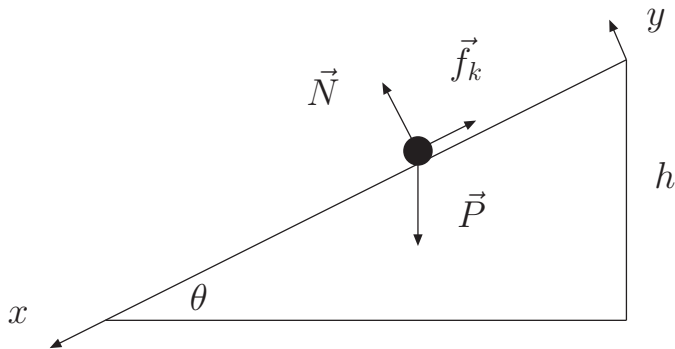
dove μ_k è il **coefficiente di attrito dinamico**.

μ_s e μ_k sono coefficienti adimensionali, che dipendono sia dal corpo che dalla superficie. Supporremo inoltre che μ_k non dipenda dalla velocità.

N.B. Le due relazioni precedenti riguardano i moduli delle forze di attrito: la direzione di queste forze è sempre parallela alla superficie e opposta al moto (desiderato), mentre $\vec{N}$ è perpendicolare alla superficie di appoggio.

Esempio: il piano inclinato con attrito

Un corpo scivola verso il basso di un piano inclinato e tra corpo e piano vi è una forza di attrito dinamico con coefficiente μ_k . Sul corpo agiscono le seguenti forze:



- ★ forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$
- ★ forza normale $\vec{N}$
- ★ forza di attrito dinamico di modulo $f_k = \mu_k N$, tangente al piano e diretta in verso opposto al moto.

Per la seconda legge della dinamica $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_k$, che proiettata sugli assi cartesiani

$$ma_x = mg \sin \theta - \mu_k N$$

$$ma_y = -mg \cos \theta + N$$

Non c'è moto lungo l'asse y quindi $a_y = 0$ e $N = mg \cos \theta$. Sostituendo nella prima eq. si ottiene l'accelerazione del corpo lungo il piano inclinato

$$ma_x = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta \rightarrow a_x = g[\sin \theta - \mu_k \cos \theta]$$

(in assenza di attrito: $a_x = g \sin \theta$).

Esercizio: Mostrare che se il corpo parte dalla cima del piano inclinato (cioé $x = 0$) con velocità nulla, appena prima di arrivare a terra ha una velocità

$$v_x = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_k \cos \theta}{\sin \theta}\right)}$$

dove h è l'altezza del piano inclinato. In particolare senza attrito si ha $v_x = \sqrt{2gh}$ che è uguale a quella che si ottiene nel caso di caduta verticale da una quota h .

Esercizio: Se il corpo viene lanciato dalla base del piano inclinato con una velocità v_0 , qual'è il verso della forza di attrito? qual'è l'accelerazione del blocco in questo caso? qual'è la distanza massima percorsa lungo il piano inclinato?