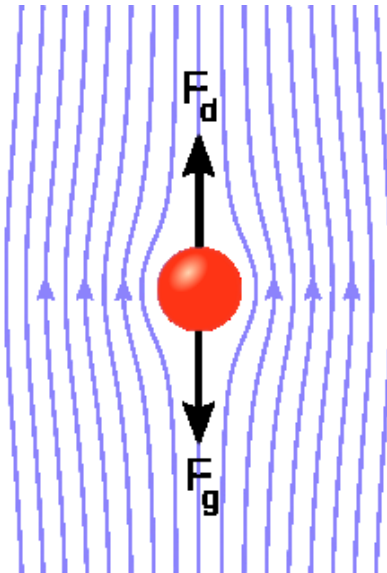


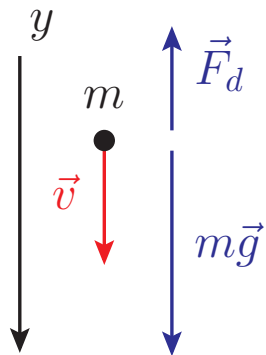
Attrito viscoso



Fenomeni di attrito nei **fluidi reali**: **viscosità**
quando un corpo si muove in un fluido c'è una
forza che si oppone al moto dipendente dalla
velocità del corpo

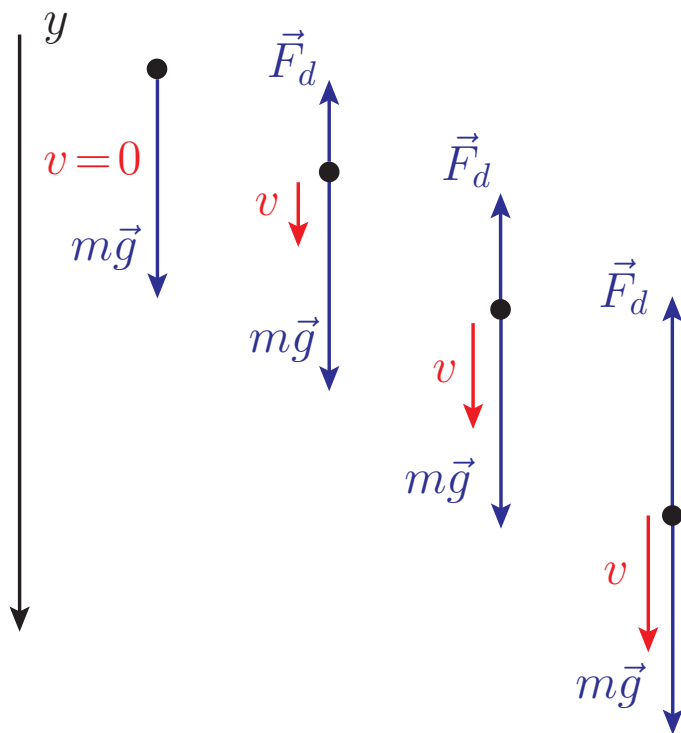
$$\vec{F}_d = -b\vec{v}$$

- ☆ b : costante che dipende da viscosità fluido e forma del corpo
- ☆ si oppone al moto
- ☆ fa sì che l'accelerazione **non sia costante**



Moto di caduta di un grave in un fluido viscoso:
il mezzo influenza il moto e limita la velocità di
caduta

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_d = (mg - bv)\hat{j}$$



m viene lasciata cadere con velocità nulla: inizialmente c'è solo la forza peso, mano a mano che v aumenta la forza di attrito diventa più forte fino a uguagliare la forza peso

$$F_d = mg \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow$$

$\vec{v} = \vec{v}_L = \text{cost}$ **velocità limite**

$$v_L = \frac{mg}{b}$$

Dipendenza temporale della velocità:

$$\frac{F}{m} = a \rightarrow \frac{mg - bv}{m} = \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt$$

Integrando ambo i membri

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t dt \rightarrow t = -\frac{m}{b} \ln \left(1 - \frac{bv}{mg} \right) \rightarrow v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-bt/m} \right)$$

per t grande ($e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$) $v(t) \rightarrow \frac{mg}{b} = v_L$

Forze di contatto - forze a distanza

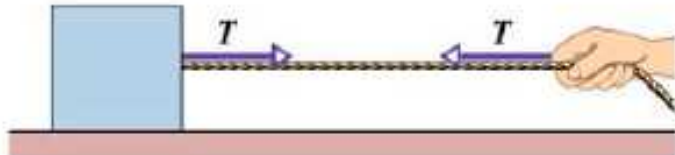
Le forze sono di due tipi: **a distanza** e **di contatto**.

Al primo tipo appartiene la forza di gravità: non è necessario che il corpo sia in contatto con la terra per sentire l'attrazione della terra (altri esempi di forze a distanza sono la forza elettrica e la forza magnetica, che studierete in Fisica2, le forze nucleari deboli e forti).

Al secondo tipo appartengono la forza normale e le forze di attrito (a livello microscopico anche queste sono di natura elettromagnetica).

Forze di contatto: tensione

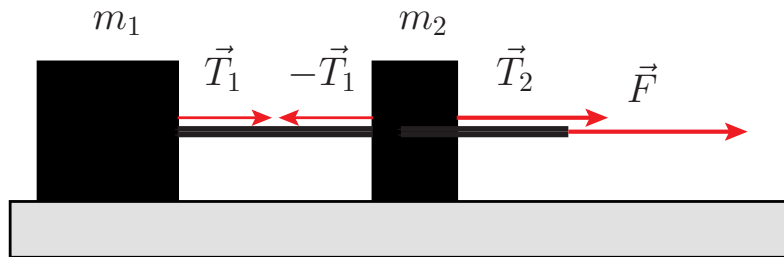
Una cassa viene tirata da una **fune ideale** (sottile e di massa trascurabile): la fune è tesa e esercita sulla cassa una forza di trazione $\vec{T}$ diretta lungo il filo e nel verso di allontanamento dal corpo. La mano tira verso destra



con una forza $\vec{F}$. Sulla fune agisce la forza della mano e quella della cassa $-\vec{T}$ (3^a legge di N.): $\vec{F} - \vec{T} = m_{fune} \vec{a}_{fune} \sim 0$ quindi $\vec{T} = \vec{F}$. **Se la corda ha massa trascurabile la forza esercitata ad un capo è trasmessa per tutta la corda fino al capo opposto.**

La direzione ortogonale al piano non interviene: $\vec{N}$ equilibra $\vec{P}$.

Es. due casse trascinate da una fune applicando una forza esterna $\vec{F}$ per la cassa 2:



$$\sum F_{ix} = -T_1 + T_2 = -T_1 + F = m_2 a_{2x}$$

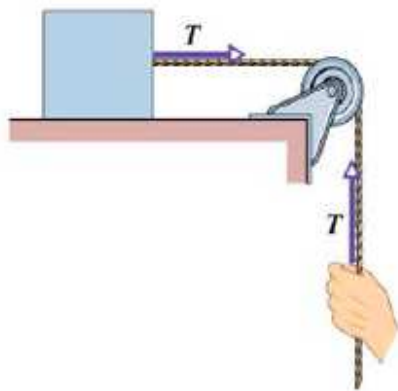
per la cassa 1:

$$\sum F_{ix} = T_1 = m_1 a_{1x}$$

la fune è **inestensibile** $a_{1x} = a_{2x} \equiv a_x$

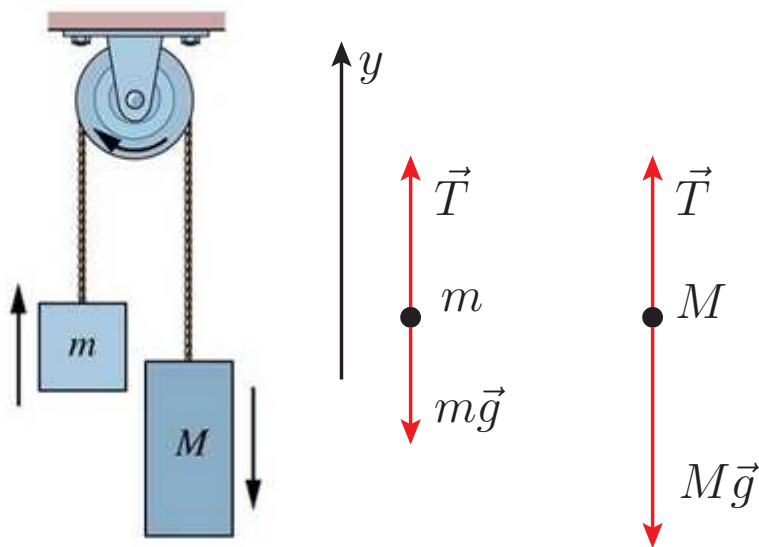
$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}, \quad T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F$$

Se la massa della corda non è trascurabile la tensione varia da punto a punto



In fisica si usano le carrucole per deviare le corde: se la massa della carrucola è trascurabile ed è senza attrito la tensione lungo la curva non cambia

Macchina di Atwood (ideale)



la corda è inestensibile:

le accelerazioni dei due corpi hanno
la stessa intensità ma verso opposto

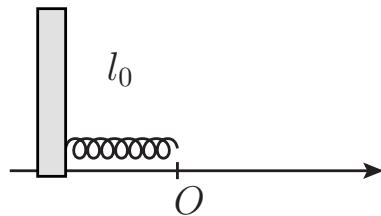
$$T - mg = ma \quad T - Mg = -Ma$$

$$a = \frac{M - m}{M + m}g \quad T = \frac{2mM}{M + m}g$$

Se $M > m \rightarrow a > 0$: il blocco m sale e il blocco M scende

Se $M < m \rightarrow a < 0$: il blocco m scende e il blocco M sale

Forza elastica: quando la molla è a riposo ha una lunghezza l_0



$\vec{F}_e$ forza di richiamo della molla ideale

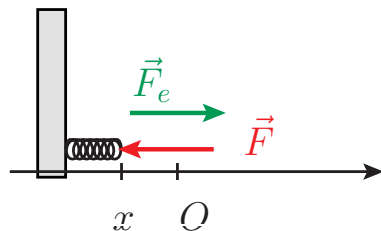
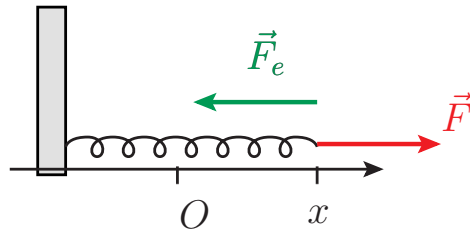
$$\vec{F}_e = -kx\hat{i}$$

k costante elastica della molla

x dà lo scostamento dalla posizione di riposo della molla (che è quindi lunga $l_0 + x$):

se $x > 0$, la forza di richiamo è diretta nel verso negativo delle x quindi verso O ;

se $x < 0$, la forza di richiamo è diretta nel verso positivo delle x quindi verso O



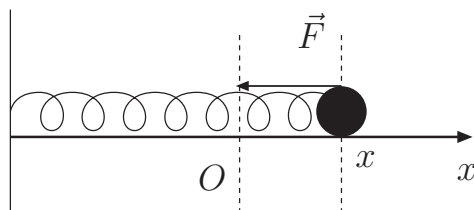
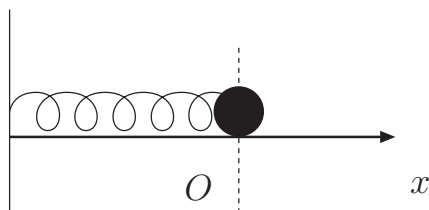
Moto armonico

Discutiamo le caratteristiche del moto armonico utilizzando l'esempio di una **molla ideale** al cui estremo libero è fissato un oggetto di massa m libero di muoversi su un piano orizzontale privo di attrito.

Sia $x = 0$ la posizione della massa quando la molla è a riposo.

A $t = 0$ la molla viene allungata di un tratto x_0 e poi viene rilasciata con velocità nulla $v_0(0) = 0$ (**condizioni iniziali**).

Sulla molla agisce una forza $\vec{F}_e = -kx\hat{i}$ (la forza peso e la forza normale sono uguali ed opposte: non c'è moto nella direzione y).



$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{con: } x(0) = x_0, v(0) = 0$$

la derivata seconda della funzione $x(t)$ è uguale a **meno** la funzione stessa moltiplicata per una costante positiva $\omega^2 \equiv k/m$: la soluzione di questa equazione differenziale è

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{moto armonico}$$

A e φ sono delle costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

La verifica è immediata: si calcola la derivata seconda della soluzione e si inserisce nell'equazione, che risulta essere soddisfatta se $\omega = \sqrt{k/m}$ (ω prende il nome di **pulsazione**).

Si noti che $[\omega] = [T^{-1}]$.

La presenza delle due costanti A e φ nella soluzione è dovuta al fatto che l'equazione è un'equazione differenziale di secondo grado. Queste costanti si determinano imponendo le condizioni iniziali. Dalla derivata di $x(t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

Le condizioni iniziali sono:

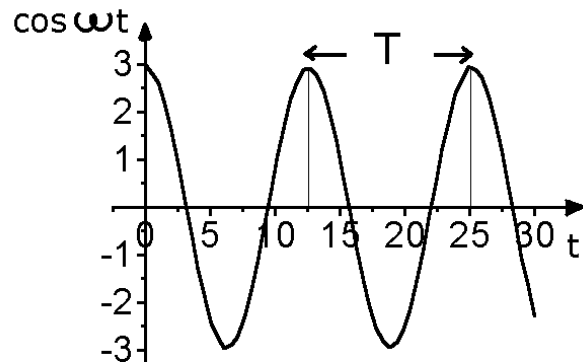
$$\begin{cases} x(0) = x_0 & \rightarrow x_0 = A \cos \varphi \\ v(0) = 0 & \rightarrow 0 = -\omega A \sin \varphi \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava $\varphi = 0$ e quindi $A = x_0$.

Sostituendo si trova

$$x(t) = x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad \text{e} \quad v(t) = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Notiamo che $x(t)$ è compreso nell'intervallo $[-x_0, x_0]$: quindi x_0 è detta **ampiezza dell'elongazione** della molla, mentre la costante φ è detta **costante di fase**.



La soluzione è una funzione periodica nel tempo: ogni moto che si ripete ad intervalli regolari di tempo si chiama **moto periodico**.

Se il corpo si muove avanti e indietro sullo stesso percorso il moto è detto **oscillatorio**.

Si chiama **periodo T** di un moto oscillatorio l'intervallo di tempo necessario per avere un'oscillazione completa.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

La **frequenza** è il numero di oscillazioni nell'unità di tempo (nel sistema SI in un secondo):

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{unità (SI)= Hertz (Hz)}$$

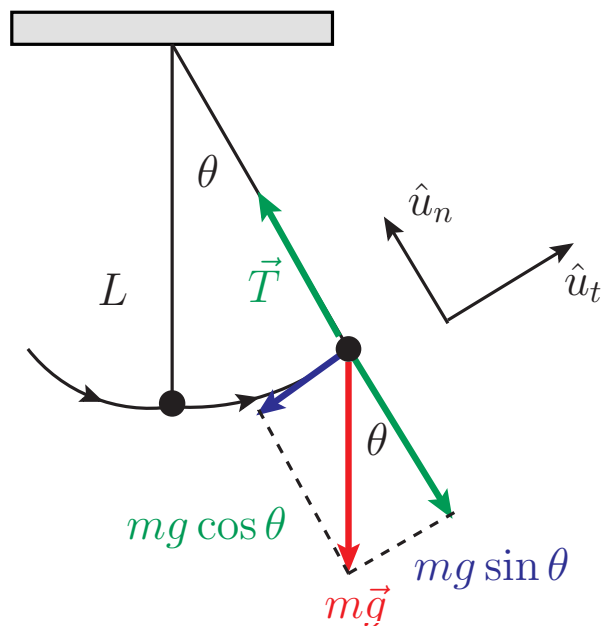
Esercizio: determinare la soluzione nel caso in cui all'istante iniziale la massa m è nella posizione di equilibrio e le viene impartita una velocità iniziale v_0 , cioè le condizioni iniziali sono: $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$.

Soluzione:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pendolo semplice

Il pendolo semplice è un sistema ideale formato da una massa puntiforme sospesa ad un filo inestensibile e privo di massa. Il pendolo viene spostato



dalla sua posizione di equilibrio e lasciato andare: **il moto è oscillatorio e periodico**. Sia L la lunghezza del filo e m la massa dell'oggetto.

Ad t fissato consideriamo il sistema di assi cartesiani che ha come origine il punto occupato da m e direzioni individuate dai versori $\hat{u}_t$, tangente alla traiettoria, e $\hat{u}_n$ diretto come il filo.

θ è l'angolo che il filo forma con la verticale.

La componente lungo $\hat{u}_n$ dell'equazione del moto

$$T - mg \cos \theta = ma_n = 0 \quad \text{non c'è moto lungo } \hat{u}_n$$

la componente lungo $\hat{u}_t$

$$-mg \sin \theta = ma_t \quad a_t = L\alpha = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \alpha = \text{accelerazione angolare}$$

Se θ è molto piccolo: $\sin \theta \sim \theta \quad \rightarrow \quad -mg\theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$

è un'equazione analoga a quella della molla:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{moto armonico semplice}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{periodo delle piccole oscillazioni del pendolo}$$

l'ampiezza θ_0 e la fase φ sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

Lo **spostamento** lungo l'arco di circonferenza è $s(t) = L\theta(t) = L\theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$

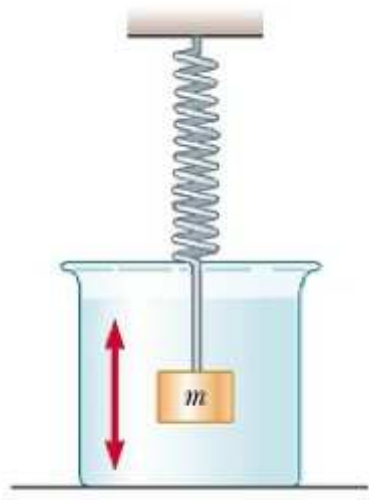
la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

la velocità lineare $v(t) = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ed è nulla agli estremi dell'oscillazione, quando il moto si inverte.

Moto armonico smorzato

Il moto dell'oscillatore viene rallentato da una forza impressa dall'esterno,



come ad esempio un blocco appeso a una molla e immerso in un liquido viscoso che esercita una forza frenante: lentamente, l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce.

Supponiamo che la forza di smorzamento sia proporzionale alla velocità del blocco

$$F_{sm} = -bv \quad \text{si oppone al moto}$$

b è detta costante di smorzamento e dipende dalle

caratteristiche del sistema (liquido, forma del corpo,...). Trascurando per semplicità la forza di gravità (o supponendo che il sistema sia orizzontale) l'equazione del moto del blocco è

$$-bv - kx = ma \quad \text{cioé} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

la cui soluzione è

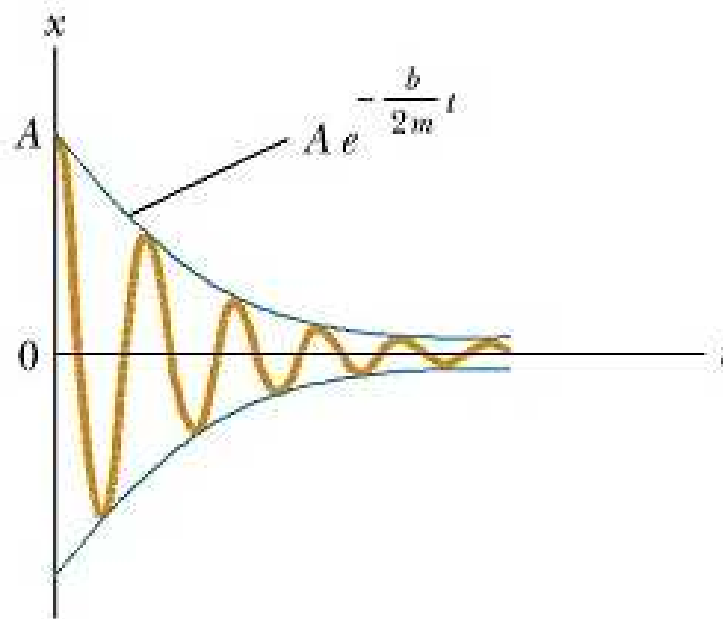
$$x(t) = Ae^{-bt/(2m)} \cos(\omega_{sm}t + \varphi)$$

dove A e φ sono delle costanti (l'ampiezza e la fase dell'oscillazione) e

$$\omega_{sm} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Se lo smorzamento è piccolo $b \ll \sqrt{km}$, si ha $\omega_{sm} \sim \omega = \sqrt{k/m}$ la pulsazione è approssimativamente uguale a quella in assenza di smorzamento ma l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce nel tempo in modo esponenziale:

$$A \rightarrow Ae^{-bt/(2m)}$$



Dinamica del moto circolare

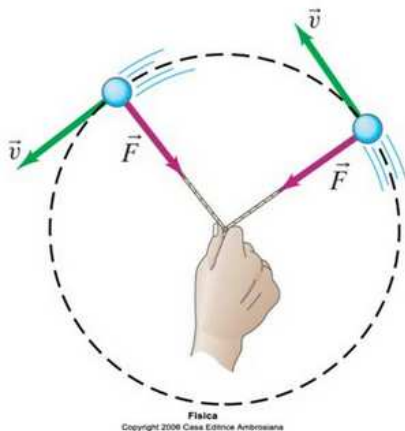
Se un corpo si muove su una circonferenza di raggio R , con velocità in modulo costante, si dice che è in moto circolare uniforme. L'accelerazione è diretta verso il centro ed è in modulo costante e vale

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad \text{accelerazione centripeta}$$

Dalla 2^a legge di Newton sul corpo deve agire una forza F

$$F_c = m \frac{v^2}{R} \quad \text{forza centripeta}$$

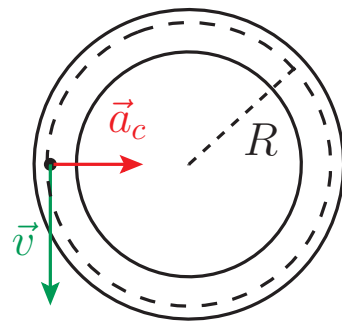
diretta verso il centro di rotazione e costante in modulo poichè il modulo di v è costante: **una forza centripeta accelera un corpo variandone il vettore velocità senza variarne il modulo.**



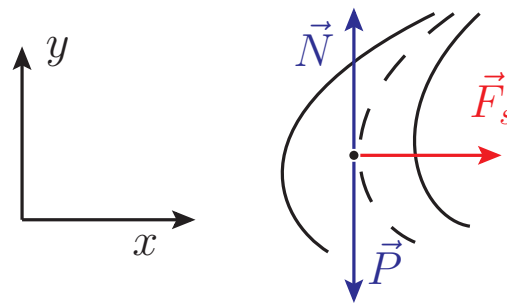
La forza centripeta non è un nuovo tipo di forza: può essere una forza di attrito (tra le ruote e l'asfalto di una macchina in curva), la forza di gravità (nel caso di una navicella che ruota attorno alla terra), una forza di tensione (sasso trattenuto da una corda legata a un palo che ruota attorno al palo):

il nome indica la direzione della forza rispetto al moto.

Velocità massima in curva: l'auto compie una traiettoria circolare grazie alla forza di attrito **statico** che è diretta lungo la direzione radiale verso il centro: è la forza di attrito statico perchè non c'è moto lungo la direzione radiale (il raggio della circonferenza è costante)



vista dall'alto



vista di fronte

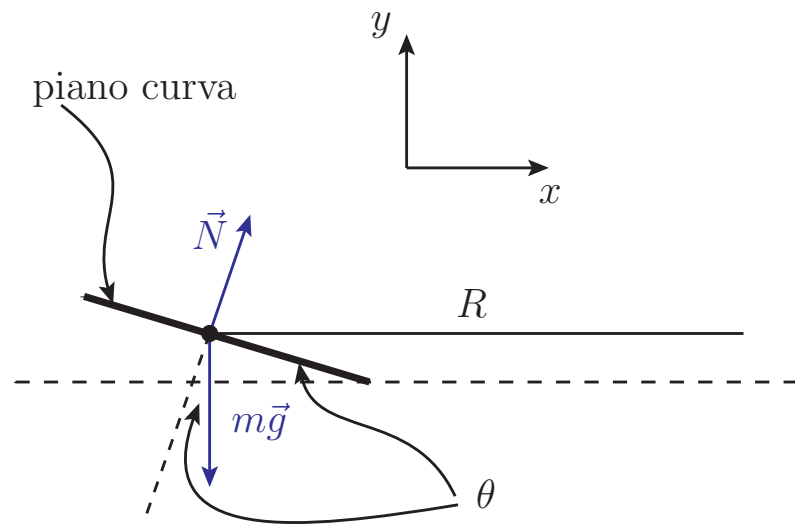
$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_s \leq \mu_s N \\ \sum F_y &= N - mg = 0\end{aligned}$$

F_s ha un massimo e l'attrito riesce a far compiere all'auto una traiettoria circolare solo se

$$\mu_s mg \geq ma_c = m \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad v \leq \sqrt{\mu_s g R}$$

Esempio: se $\mu_s = 0.82$, $R = 45 \text{ m}$ si trova $v_{max} = 19 \text{ m/s} = 68 \text{ km/h}$.

Se la curva è sopraelevata (e senza attrito)



$$\sum F_y = N \cos \theta - mg = 0 \rightarrow N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\sum F_x = N \sin \theta = ma_c = m \frac{v^2}{R} \rightarrow$$

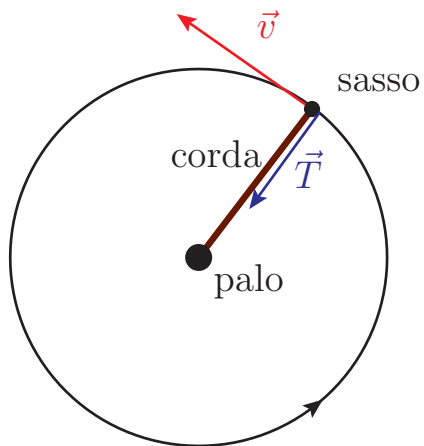
$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v^2}{gR} \right)$$

Esempio: se $v = 50 \text{ km/h} \sim 13.9 \text{ m/s}$ e $R = 45 \text{ m}$ un'inclinazione di $\theta = 23.6^\circ$ permette all'auto di rimanere su una traiettoria circolare anche in assenza di attrito

Sistemi di riferimento (SdR)

La prima legge di Newton è detta anche legge di inerzia. I SdR in cui è valida si chiamano inerziali. Essi sono sistemi che o sono fermi rispetto alle stelle fisse o si muovono con velocità costante rispetto ad esse.

È possibile tuttavia applicare le leggi della meccanica classica in un SdR non inerziale, come ad esempio un sistema in rotazione. In questo caso dobbiamo introdurre forze che non sono newtoniane, le cosiddette **forze fittizie**. Queste forze non sono reali nel senso che non nascono dalla interazione con altri corpi e scompaiono quando si torna in un SdR inerziale.

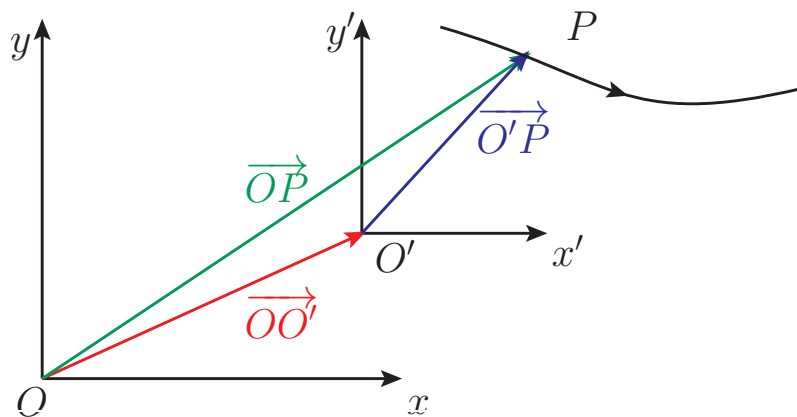


Consideriamo ad esempio un blocco di massa m posto su di una piattaforma rotante, orizzontale, senza attrito, legato ad una fune. Per l'osservatore inerziale il blocco ruota ed ha un'accelerazione centripeta che è fornita dalla forza di tensione della fune e la 2^a legge di Newton si scrive $T = mv^2/r$.

Per un osservatore posto sulla piattaforma il blocco è in quiete, cioè $\vec{a} = 0$ ma la corda è tesa, quindi lungo la corda agisce la stessa forza di tensione.

La 2^a legge di Newton $F = ma$ rimane valida a patto di introdurre una forza fittizia che bilanci la forza di tensione della corda. Questa forza è detta **centrifuga ed è diretta verso l'esterno ed ha modulo pari a mv^2/r** .

Più in generale consideriamo un SdR inerziale Oxy e un altro SdR $O'x'y'$ in moto rispetto al precedente (per semplicità consideriamo il caso di due dimensioni).



Il vettore posizione di un punto P per il SdR Oxy e per il SdR $O'x'y'$ sono legati da

$$\vec{OP} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$$

derivando rispetto al tempo si trova la relazione tra le velocità di P nei due SdR

$$\vec{v}_P^{(O)} = \vec{v}_P^{(O')} + \vec{v}_{O'}^{(O)} \quad (*)$$

$\vec{v}_{O'}^{(O)}$ è la velocità del riferimento $O'x'y'$ rispetto a Oxy .

Se il riferimento $O'x'y'$ è inerziale, cioè si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento Oxy , la velocità $\vec{v}_{O'}^{(O)}$ è costante: derivando un'altra volta rispetto al tempo si ottiene

$$\vec{a}_P^{(O)} = \vec{a}_P^{(O')} \quad \text{L'accelerazione di } P \text{ è la stessa nei due SdR}$$

* per tutti i SdR inerziali la 2^a legge di Newton si scrive allo stesso modo:

$$\begin{array}{ll}\text{per } Oxy : & \sum \vec{F} = m\vec{a}_P^{(O)} \\ \text{per } O'x'y' : & \sum \vec{F} = m\vec{a}_P^{(O')} = m\vec{a}_P^{(O)}\end{array}$$

e non vi sono forze fittizie.

Se il sistema $O'x'y'$ non si muove di moto rettilineo uniforme cioè **il sistema non è inerziale**, la velocità $\vec{v}_{O'}^{(O)}$ non è costante e le accelerazioni di P per i due SdR sono diverse

$$\vec{a}_P^{(O)} = \vec{a}_P^{(O')} + \vec{a}_{O'}^{(O)}$$

La 2^a legge di Newton non è più valida per $O'x'y'$:

$$\begin{array}{ll}\text{per } Oxy : & \sum \vec{F} = m\vec{a}_P^{(O)} \\ \text{per } O'x'y' : & \sum \vec{F} \neq m\vec{a}_P^{(O')} = m\vec{a}_P^{(O)} - m\vec{a}_{O'}^{(O)}\end{array}$$

Nel SdR non inerziale $O'x'y'$ si introducono delle forze apparenti in modo tale che

$$\sum \vec{F} - \vec{F}_{app} = m\vec{a}_P^{(O')}$$

Le forze apparenti non derivano da interazioni con altri corpi, sono proporzionali alla massa del corpo e scompaiono in un sistema di riferimento inerziale, ma in un SdR non inerziale sono forze reali.

Prossima lezione Lunedì 4 aprile ore 16.30:

Lavoro, energia cinetica e energia potenziale