

* Componenti del momento angolare

In generale $\vec{L} = L_z + \vec{L}_\perp$, dove z è la direzione di $\vec{\omega}$.

Supponiamo che $\vec{\omega}$ sia costante:

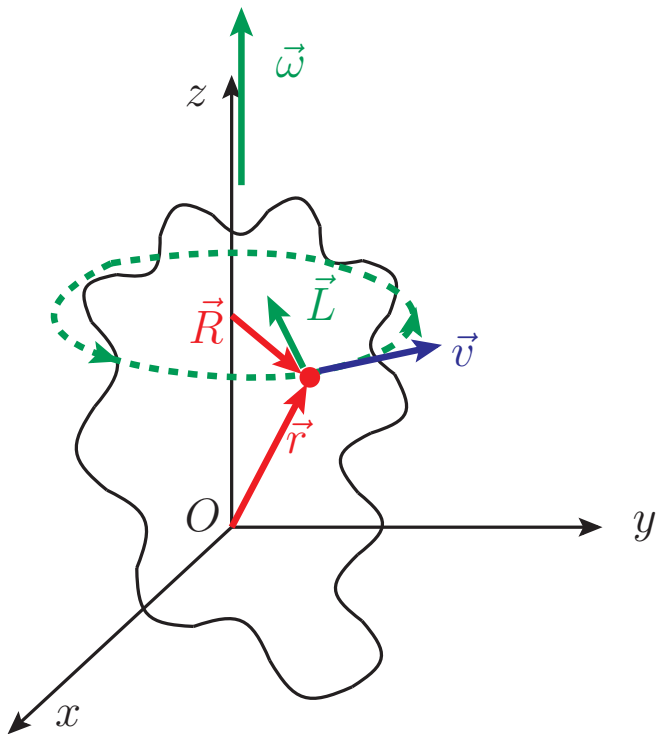
$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

$\vec{r}$ individua m rispetto a O e $\vec{R} = \vec{r}_\perp$ è il raggio della circonferenza su cui si muove m .

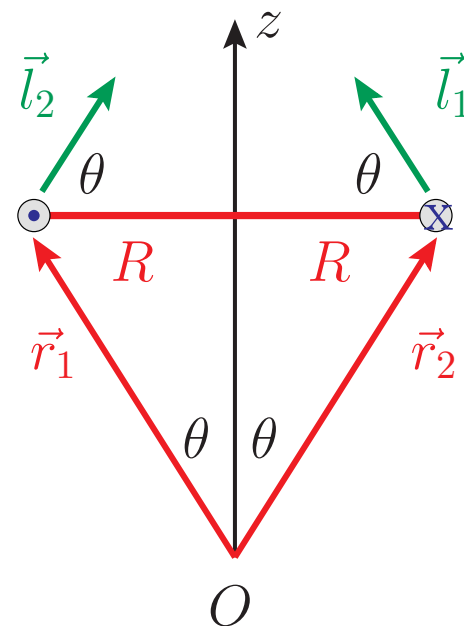
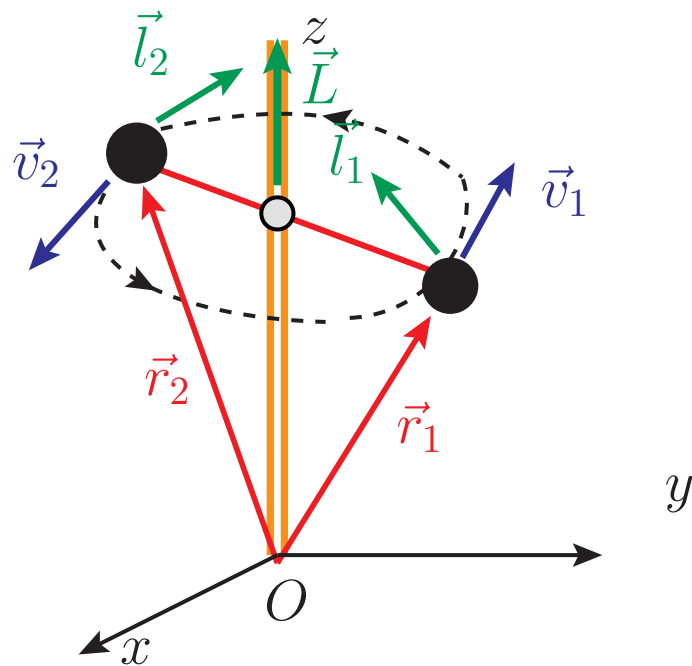
La legge del moto rotatorio

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})) \\ &= m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{\omega} \times \vec{L} \end{aligned}$$

la variazione di $\vec{L}$, cioè $d\vec{L}$, è un vettore ortogonale a $\vec{\omega}$ e al $\vec{L}$: il modulo di $\vec{L}$ non cambia e il momento delle forze esterne determina la variazione della direzione di $\vec{L}$.



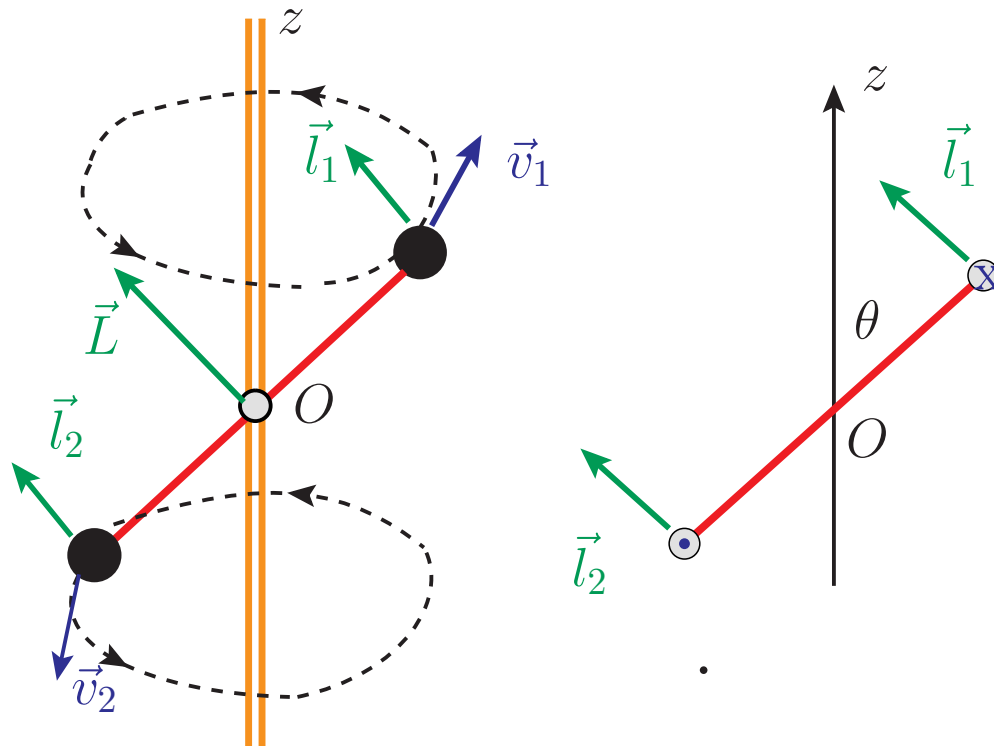
Esempio: corpo rigido simmetrico rispetto all'asse di rotazione, come un manubrio perpendicolare all'asse z e le due masse disposte simmetricamente rispetto all'asse e in un piano perpendicolare all'asse che ruotano con velocità angolare ω



$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ è parallelo all'asse z : $L_z = 2mR^2\omega$ ($R = |\vec{r}_{1\perp}| = |\vec{r}_{2\perp}|$) e

$$\sum \vec{\tau}_i^{ext} = \vec{\omega} \times \vec{L} = 0$$

Diverso è il caso di un corpo rigido asimmetrico come un manubrio che sta in un piano inclinato rispetto all'asse di rotazione



$\vec{L}$ non è $\parallel \vec{\omega}$ e ruota attorno all'asse z

$$L_z = 2mr^2 \sin^2 \theta \omega$$

$$L_{\perp} = 2mr^2 \sin \theta \cos \theta \omega$$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$$

il momento delle forze che i sostegni esercitano sull'albero è non nullo

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

* Nel caso più semplice in cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ si ha

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} \Rightarrow \sum_i \vec{\tau}_i^{ext} = I_z \vec{\alpha}$$

* Nel caso generale $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$ ma si ha sempre che $L_z = I_z \omega$ e per la componente z di $\vec{L}$ si ha ancora

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha \Rightarrow \sum_i \tau_{iz}^{ext} = I_z \alpha$$

Nota: abbiamo implicitamente supposto che il polo O fosse fisso e coincidesse con l'origine del sistema di riferimento: il polo O rispetto a cui si calcola il momento angolare e il momento delle forze può anche essere in moto. Dal legame tra i due sistemi di riferimento si trova

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_O \times M\vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{\tau}_i^{ext}$$

quindi le formule usate valgono anche quando O è in moto ma con velocità parallela a quella del CM (o coincide con il CM, che può essere in moto).

Momento Angolare e matrice di inerzia

* Assi principali di inerzia

Per una rotazione attorno all'asse z con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ vale la relazione

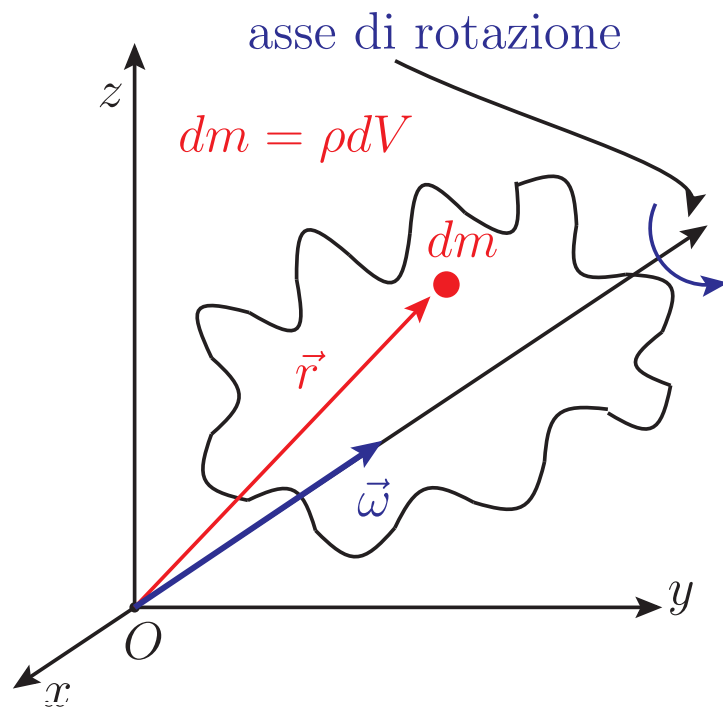
$$L_z = I_z \omega$$

ma non vale la relazione vettoriale $\vec{L} \neq I_z \vec{\omega}$.

Gli assi di rotazione per i quali il momento angolare è parallelo all'asse di rotazione si dicono **assi principali di inerzia**. Quando il solido ha una simmetria, questi coincidono con gli assi di simmetria: ad es. per una sbarra cilindrica gli assi principali sono dati dall'asse di simmetria del cilindro e due assi qualunque ortogonali a questo.

Mostriamo che il momento angolare e la velocità angolare non sono in genere paralleli. Sia $\vec{\omega}$ il vettore che individua l'asse di rotazione del solido in un dato sistema di riferimento $Oxyz$.

Calcoliamo il momento angolare rispetto a O come somma dei momenti angolari dei singoli dm in cui scomponiamo il solido: se dm è individuato dal vettore $\vec{r}$ la sua velocità è $\vec{\omega} \times \vec{r}$ e il suo contributo al momento angolare è $d\vec{L} = \vec{r} \times dm\vec{v}$



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \int (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \rho dV \\ &= \int (r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}) \rho dV\end{aligned}$$

da dove si trovano le componenti del momento angolare.

Notiamo che $\vec{L}$ dipende linearmente da $\vec{\omega}$, cioè

$$L_{Ox} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \quad \text{con}$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \rho dV, \quad I_{xy} = - \int xy \rho dV, \quad I_{xz} = - \int xz \rho dV$$

Per le altre componenti di $\vec{L}$ si hanno relazioni analoghe. La relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ è data da un'unica formula usando le matrici:

si mettono le componenti dei vettori $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ in matrici colonne e le 9 componenti di I in una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

la matrice I è detta **matrice d'inerzia** (o tensore d'inerzia).

Per semplificare si può sempre prendere **l'asse di rotazione come asse z** , quindi $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ e si ha

$$L_{Ox} = I_{xz}\omega, \quad L_{Oy} = I_{yz}\omega, \quad L_{Oz} = I_{zz}\omega \equiv I_z\omega$$

l'ultima eq. dà la componente di $\vec{L}$ lungo l'asse di rotazione.

In generale I_{xz} e I_{yz} sono non nulli e $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$.

L'asse z è un asse principale d'inerzia se $I_{xz} = I_{yz} = 0$ e in questo caso $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

Conclusione: gli assi principali di inerzia sono le uniche direzioni possibili di $\vec{\omega}$ per le quali $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ sono paralleli.

Se le forze applicate al corpo rigido sono tali da avere momento nullo (rispetto a O) allora $\vec{L}$ è costante nel tempo. Lo stesso non succede per $\vec{\omega}$ ma se $\vec{\omega}$ è diretta lungo un asse principale allora la sua direzione coincide con quella di $\vec{L}$ e rimane costante nel tempo. Questo fatto importante per comprendere certe caratteristiche non proprio intuitive nel moto di un corpo rigido.

Esercizio: Calcolare i momenti di inerzia principali riferito al sistema del centro di massa per un cilindro omogeneo di massa M , altezza h e raggio di base R .

L'elemento di volume del cilindro è $dV = dz dr r d\theta$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ indica la distanza di dV dall'asse z

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \frac{M}{\pi R^2 h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^R r dr (x^2 + y^2) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi R^2 h} h \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{MR^2}{2}$$

per il calcolo di I_{xx} e I_{yy} sfruttiamo il fatto che per simmetria sono uguali (dV è simmetrico nello scambio $x \leftrightarrow y$):

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \rho dV = I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \rho dV$$

quindi

$$2I_{xx} = \int (x^2 + y^2 + 2z^2) \rho dV = I_{zz} + 2 \int z^2 \rho dV = \frac{MR^2}{2} + \frac{Mh^2}{6}$$

da cui

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}$$

si verifica facilmente che gli elementi non diagonali della matrice di inerzia sono nulli, quindi gli assi usati sono assi di simmetria.

Equilibrio statico di un corpo rigido

→ per un punto materiale:

$$\sum \vec{F} = 0$$

→ per un corpo rigido in quiete:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$$

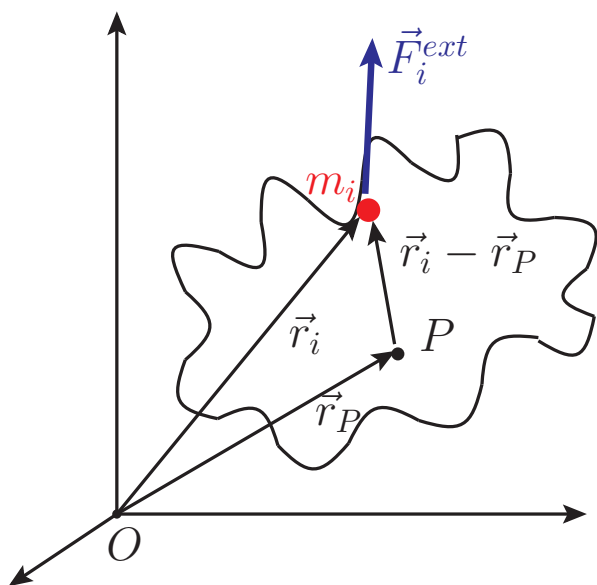
$$\Rightarrow \vec{\alpha} = 0$$

equilibrio

traslazionale

rotazionale

La condizione di equilibrio rotazionale **non dipende dal polo O**

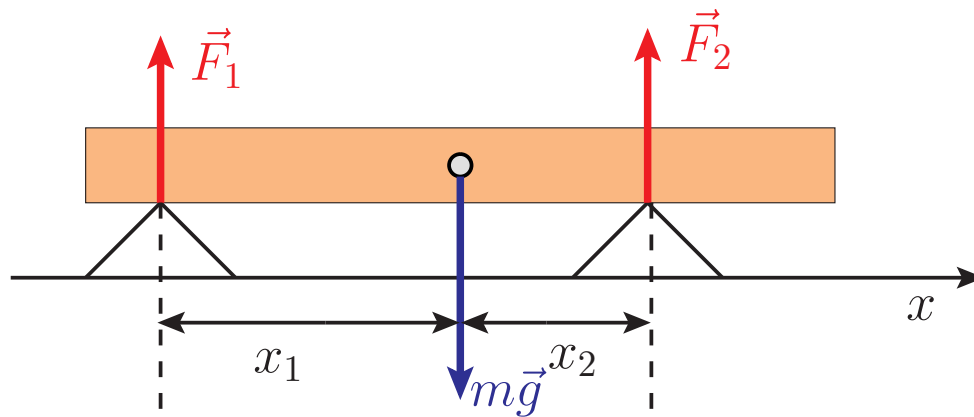


$$\begin{aligned}\vec{\tau}_O^{ext} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \\ \vec{\tau}_P^{ext} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i^{ext} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} - \sum_{i=1}^N \vec{r}_P \times \vec{F}_i^{ext} \\ &= \vec{\tau}_O^{ext} - \vec{r}_P \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \vec{\tau}_O^{ext}\end{aligned}$$

se si ha equilibrio traslazionale

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = 0$$

Esempio: un'asta su due supporti privi di attrito



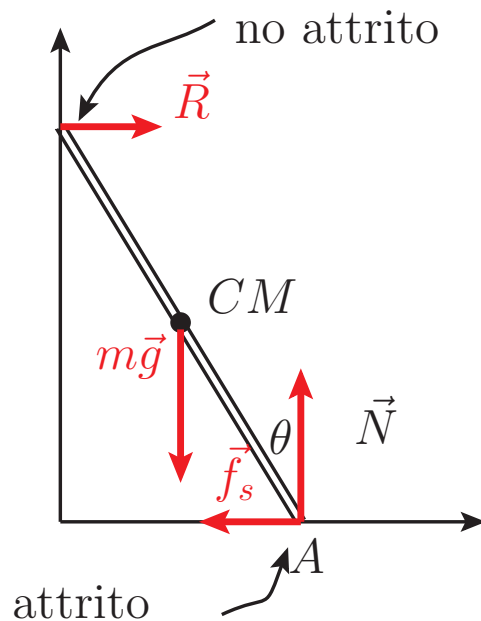
$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow$$
$$F_1 + F_2 - mg = 0$$

$$\sum \vec{\tau}^{ext} \Big|_{CM} \Rightarrow$$
$$x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0$$

$$F_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg$$

$$F_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} mg$$

Esempio: scala in equilibrio



$$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow$$

$$R - f_s = 0 \quad N - mg = 0$$

$$\sum \vec{\tau}^{ext} \Big|_A \Rightarrow (l = \text{la lunghezza della scala})$$

$$- Rl \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + mg \frac{l}{2} \sin(\pi - \theta) = 0$$

$$R = f_s = \frac{mg}{2} \tan \theta$$

la scala rimane in equilibrio se l'angolo θ soddisfa alla condizione

$$f_s = \frac{mg}{2} \tan \theta \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow \tan \theta \leq 2\mu_s$$

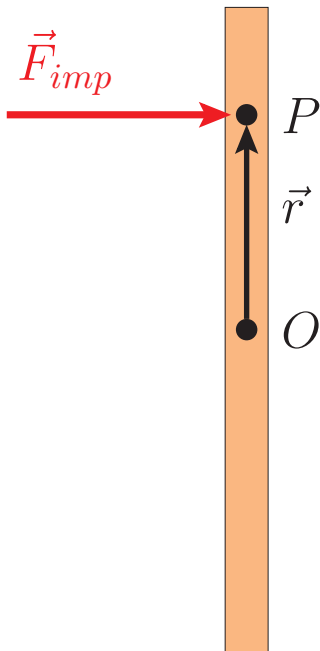
* Urti tra particelle e corpi rigidi

$$\sum \tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L} = \sum \vec{\tau} dt$$

la variazione del momento angolare nell'intervallo $\Delta t = t_f - t_i$

$$\Delta L = \int_{L_i}^{L_f} d\vec{L} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\tau} dt = \text{impulso angolare del momento } \vec{\tau}$$

Esempio: una sbarra libera di ruotare nel piano verticale attorno al suo centro O



$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_{imp} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{r} \times \vec{F}_{imp} dt = \vec{r} \times \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{imp} dt$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{r} \times \vec{J}$$

c'è un'altra forza impulsiva che è la forza di reazione vincolare ma il suo momento calcolato rispetto a O (punto di applicazione) è nullo. Altre forze esterne non impulsive hanno un momento trascurabile.

- $\vec{P}_{tot}$ si conserva se agiscono solo $\vec{F}_{int}$ o se le forze esterne non sono impulsive;
- se esiste un vincolo per un punto del corpo rigido $\vec{P}_{tot}$ non si conserva perchè ci sono forze impulsive applicate in punti diversi;
- $\vec{L}_{tot}$ si conserva se agiscono solo $\vec{F}_{int}$ indipendentemente dal polo O
- se il momento delle forze esterne rispetto a un punto O è nullo (con O fisso) $\vec{L}_{tot}$ rispetto a O si conserva.