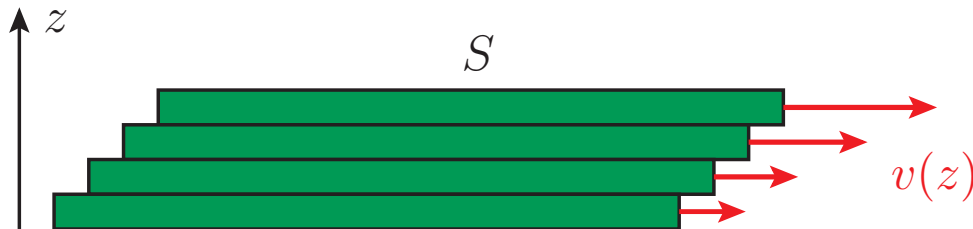


Dinamica dei fluidi

* Descrizione di un fluido in moto

Per ogni punto $P(x, y, z)$ si considera l'elemento di fluido che passa per P all'istante t e si assegna la sua velocità $\vec{v}(x, y, z, t)$: **campo delle velocità**.

In un fluido reale, si sviluppano forze di attrito tra diversi strati di fluido posti in moto relativo tra loro. Sperimentalmente, si vede che queste forze sono proporzionali alla superficie di contatto tra gli strati ed alla rapidità di variazione della velocità dei vari strati.

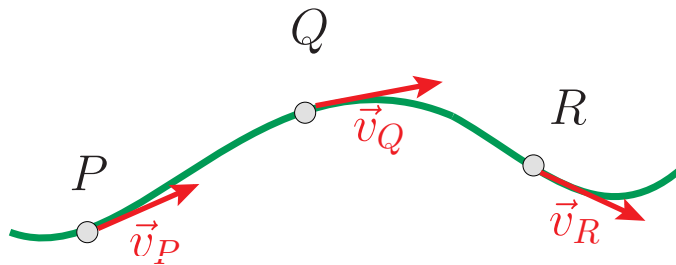


$$F_{attr} = \eta S \frac{dv}{dz} \quad \eta \text{ viscosità}$$

valori tipici per l'acqua
 $\eta \sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
(diminuisce al crescere della temperatura).

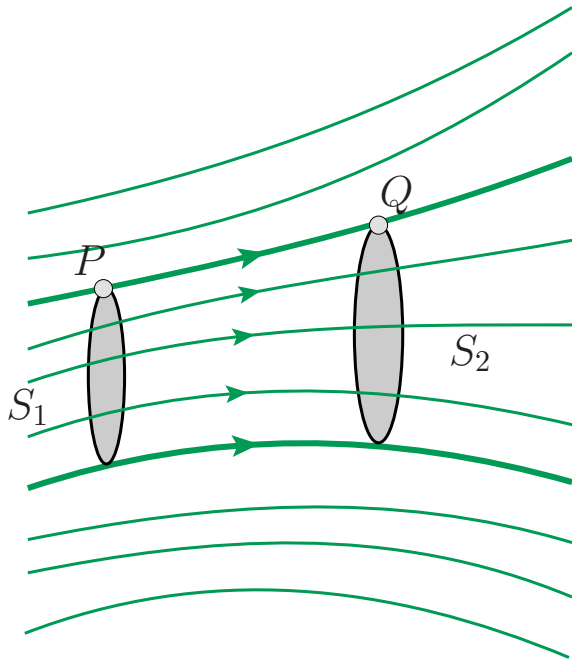
* Fluido ideale

- ☐ **non viscoso**: $\eta = 0$
- ☐ **incompressibile**: $\rho(x, y, z, t) = \text{cost}$
- ☐ **regime stazionario**: stessa $\vec{v}(x, y, z)$ degli elementi di fluido che passano in P a t differenti
- ☐ **flusso irrotazionale**



Linea di corrente (di flusso): in ogni punto $\vec{v}$ è tangente alla linea e il verso della linea è quello di $\vec{v}$.

Regime stazionario: configurazione costante nel tempo: sono le traiettorie degli elementi di fluido



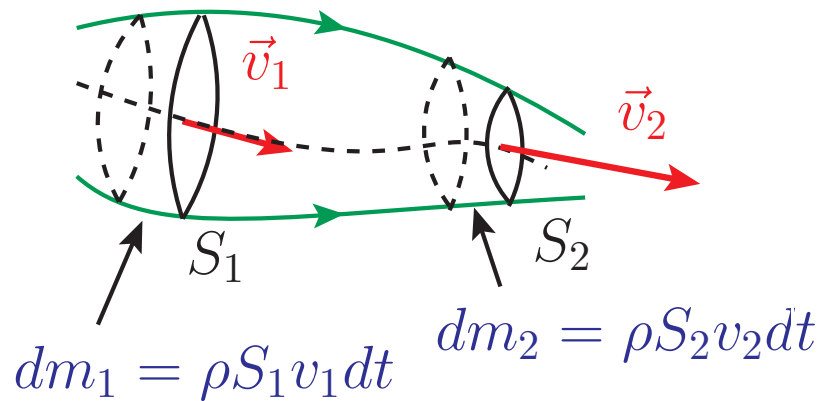
Tubo di flusso: insieme delle linee di flusso che passano per i punti di una linea chiusa di area S (= superficie laterale del tubo)

❑ due linee di flusso non possono mai incrociarsi

❑ nessuna linea di flusso può uscire dal tubo di flusso

❑ **Portata** di un tubo di flusso di sezione infinitesima dS perpendicolare alle linee di flusso $dq \equiv v dS$.
Dimensioni: $[m^3/s]$

La portata è il volume di fluido che attraversa la sezione del tubo di flusso nell'unità di tempo. Se il regime stazionario e $\rho = \text{cost}$:
la **portata è uguale per qualsiasi sezione.**



la quantità di fluido contenuto tra due sezioni qualsiasi S_1 e S_2 del tubo di flusso non cambia nel tempo:

la massa entrante nel volume V è uguale a quella uscente dal volume V

$$dm_1 = dm_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$

per un fluido incompressibile in moto stazionario la portata è costante (lungo il tubo non vi sono “sorgenti” di fluido o “perdite”)

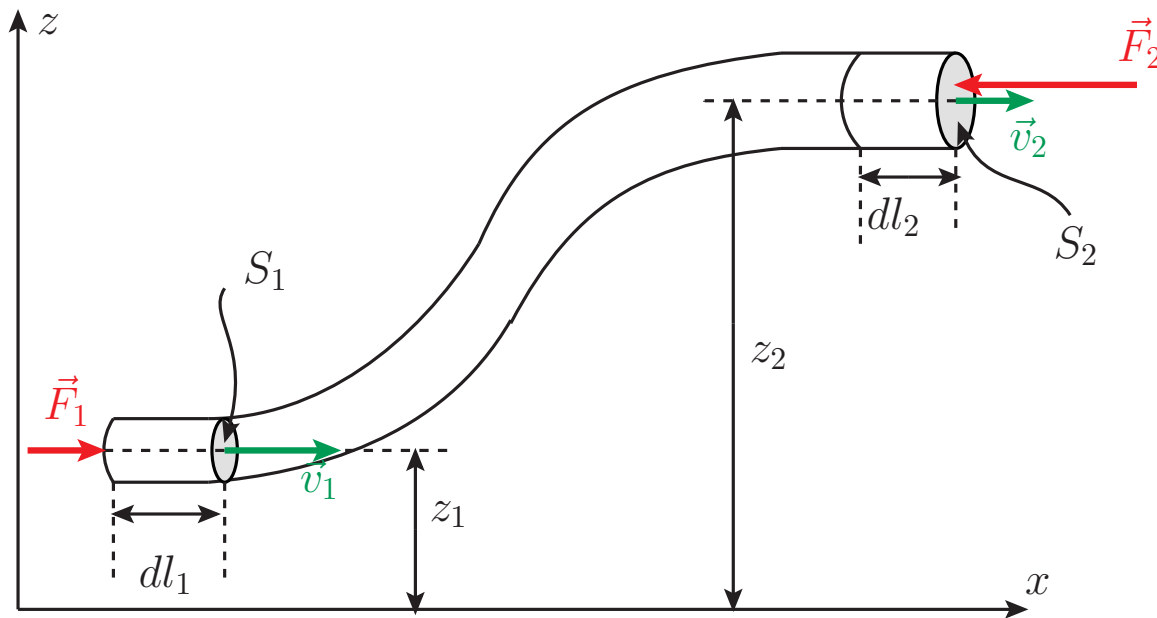
* Teorema di Bernoulli

Per un fluido incompressibile in moto stazionario soggetto alla forza di gravità, in un qualsiasi punto di un tubo di flusso la quantità:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p$$

rimane costante. Il primo e il secondo termine sono l'energia cinetica e l'energia potenziale per unità di volume.

Il teorema di Bernoulli esprime il teorema dell'energia cinetica per il moto di un fluido incompressibile in regime stazionario.



massa entrante $dm = \rho S_1 dl_1$

= massa uscente $\rho S_2 dl_2$

Lavoro forza peso:

$$dW_g = -dU_g = -dm g(z_2 - z_1)$$

Lavoro pressione:

$$dW_p = \vec{F}_1 \cdot \vec{dl}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{dl}_2$$

$$= p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2$$

$$= (p_1 - p_2) dV$$

variazione dell'energia cinetica : $dK = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$

Teorema dell'energia cinetica : $dK = dW_g + dW_p$

$$\frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2) = -\rho dV g(z_2 - z_1) + dV (p_1 - p_2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2$$

Teorema di Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

condotto orizzontale:

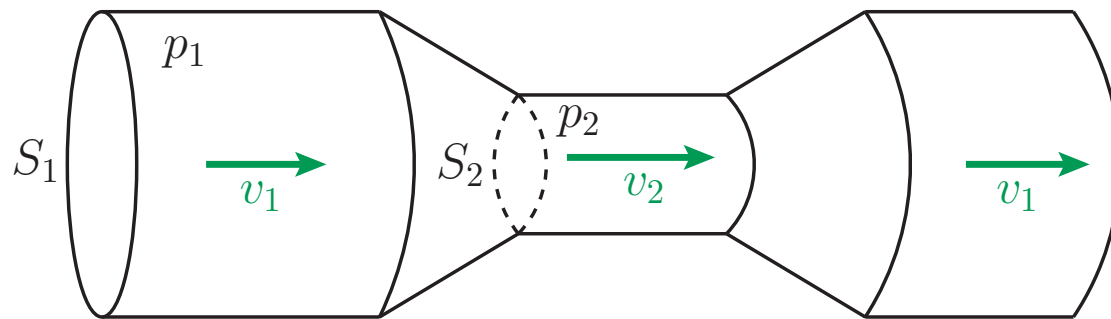
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

fluido in quiete:

$$p + \rho g z = \text{cost} \quad (\text{legge di Stevino})$$

* Applicazioni:

tubo di Venturi



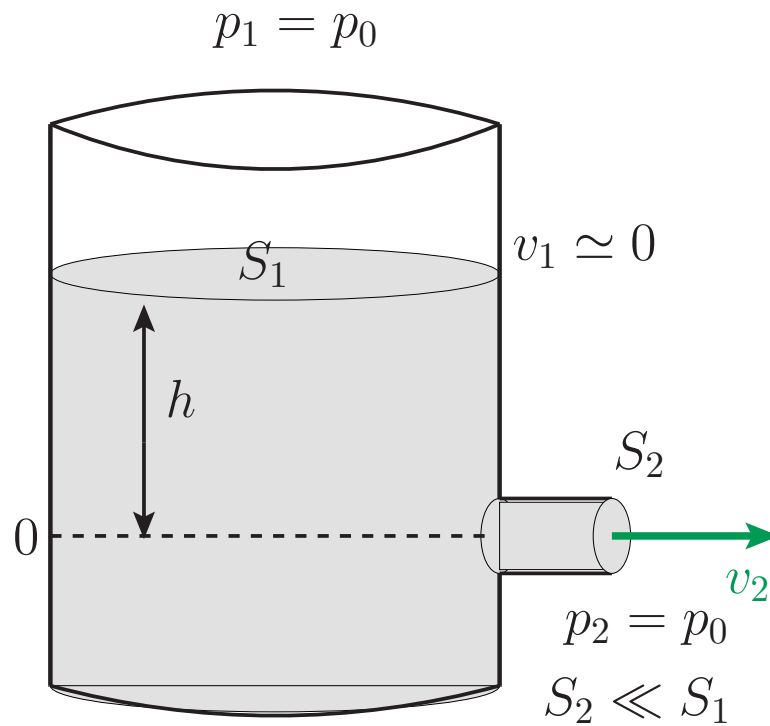
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}$$

dalla misura di p_1 e p_2 si ricava v_2 e da questa la portata del condotto

Teorema di Torricelli

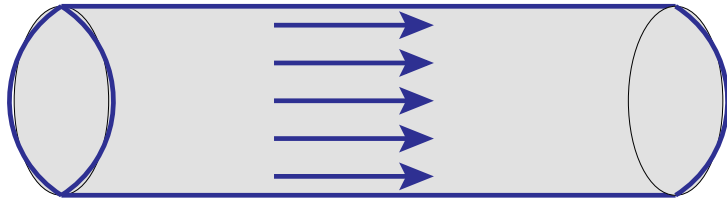


$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2$$

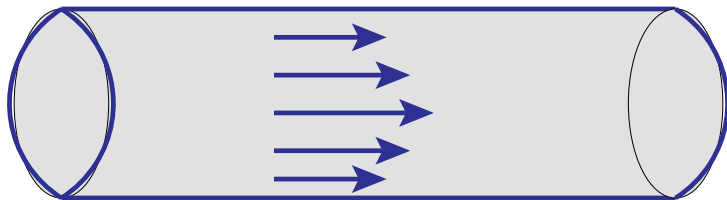
$$\rho g h + p_0 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_0$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

* Fluidi reali: flusso laminare



velocità del fluido **non elevata**:
caso ideale



caso reale: interazioni non trascurabili
tra gli elementi di fluido e con le pareti
del condotto: la velocità di fluido tende
a zero sulla parete del tubo

Regime stazionario: strati cilindrici coassiali di fluido che scorrono uno dentro l'altro a velocità differenti (“lamine”) dovuta alla presenza di forze tangenziali di attrito interno

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn} \quad \eta \text{ coefficiente di viscosità}$$

Nel SI η si misura in $Pa \cdot s$.

Nei liquidi η decresce all'aumentare di T , mentre nei gas cresce all'aumentare di T .

* Legge di Hagen-Poiseuille

La velocità del fluido varia con la distanza dalle pareti: per un condotto cilindrico di raggio R lungo l

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

dove p_1 e p_2 sono le pressioni del fluido ai capi del condotto e r è la distanza dall'asse del cilindro (v_{max} si ha per $r = 0$, cioè lungo l'asse del cilindro).

La portata del condotto

$$q = \int_S v ds = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

La quantità $(p_1 - p_2)/l$ rappresenta il **gradiente di pressione**: è necessario che sia diverso da zero per vincere la resistenza al moto dovuta all'attrito interno.

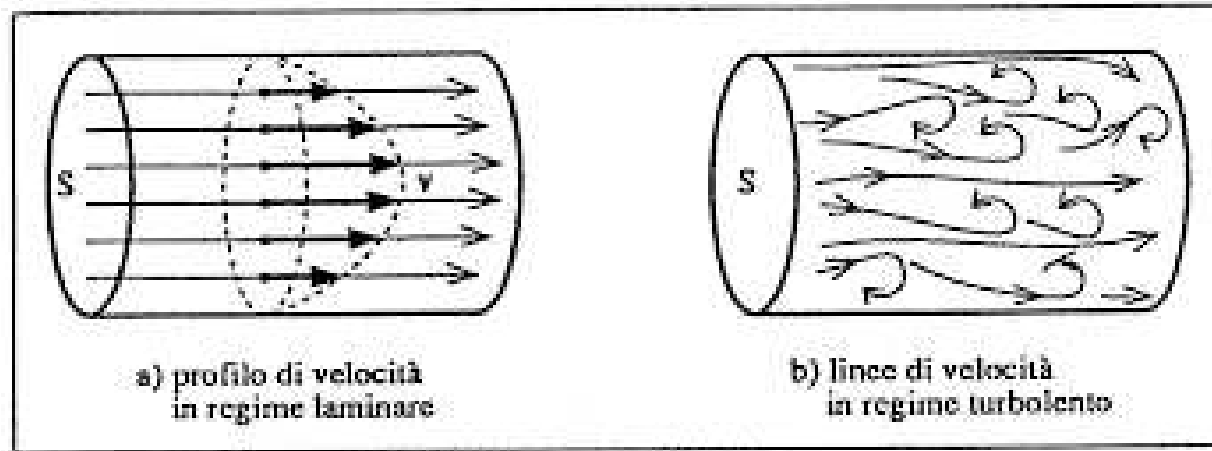
Posto $q = \bar{v}S = \bar{v}\pi R^2$

$$p_2 - p_1 = 8\pi\eta l \frac{\bar{v}}{S}$$

che è anche una definizione del coefficiente di viscosità.

* Fluidi reali: flusso turbolento

Per condotti di raggio non piccolo vi è un valore della velocità critico al di sopra della quale si creano vortici nel fluido



Si ha un regime turbolento quando ci sono forti variazioni delle componenti della velocità ortogonali alle linee di flusso, come in presenza di ostacoli e di variazione della forma del condotto.

La transizione dal regime laminare al regime turbolento è caratterizzata dal **numero di Reynolds**

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\rho v R}{\eta} \simeq 1200 \quad (\text{adimensionale})$$

la velocità critica è quindi $v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho R}$ per $v < v_c$ si ha regime laminare.