

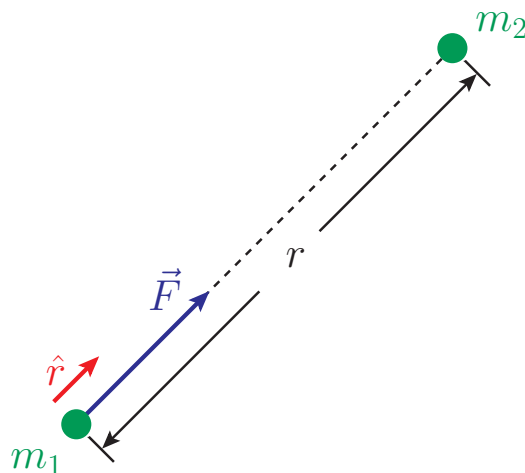
Gravitazione

Dalle osservazioni del moto dei pianeti, Galileo prima e poi Newton arrivano a formulare la legge di gravitazione universale: tra due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 , posti ad una distanza r , si esercita una forza attrattiva di modulo

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La costante G è detta costante di gravitazione universale e fu misurata da Cavendish nel 1798; il valore attualmente accettato è

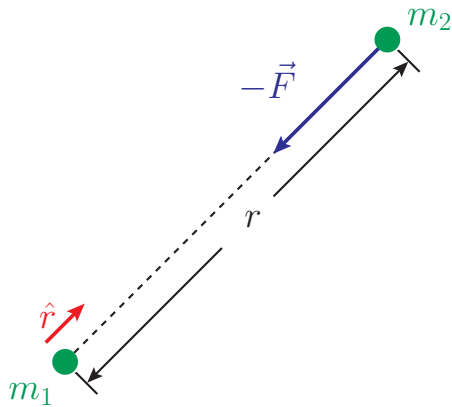
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$



La direzione della forza è lungo la congiungente le due masse e per individuarne il verso si introduce il versore $\hat{r}$ che va dalla massa m_1 alla massa m_2 .

La forza $\vec{F}$ esercitata su m_1 da m_2 è

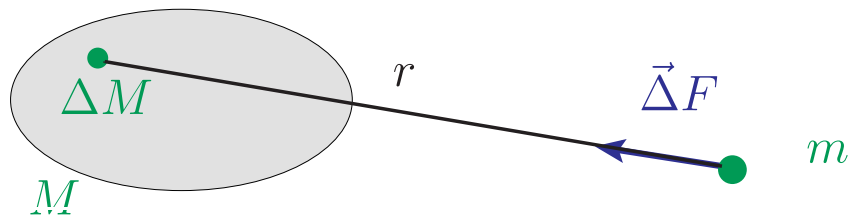
$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



ovviamente la forza esercitata sulla massa m_2 dalla massa m_1 è $-\vec{F}$

$$-\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} (-\hat{r})$$

Per come formulata **questa legge si applica a corpi puntiformi**, ma anche ad oggetti reali purchè le loro dimensioni siano piccole rispetto alla distanza.

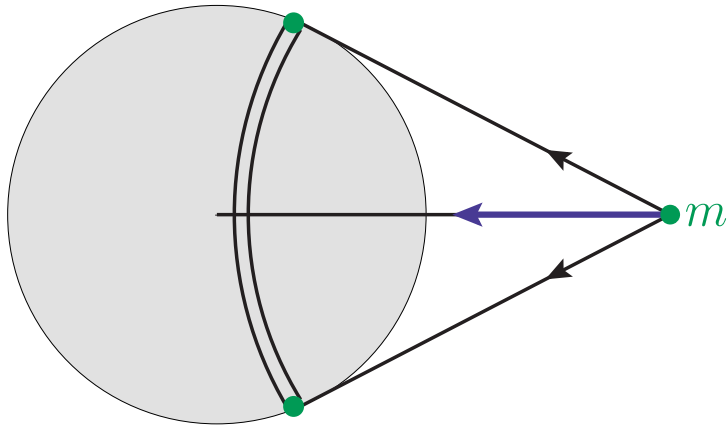


Per un corpo esteso di massa M , occorre suddividerlo in elementi ΔM che possono essere trattati come masse puntiformi, calcolare

la forza ΔF di ogni elemento ΔM : $\Delta F = G \frac{m \Delta M}{r^2}$ e sommare (o integrare) tutte queste forze elementari (si noti che al variare di ΔM varia anche r).

Ci sono due situazioni particolari:

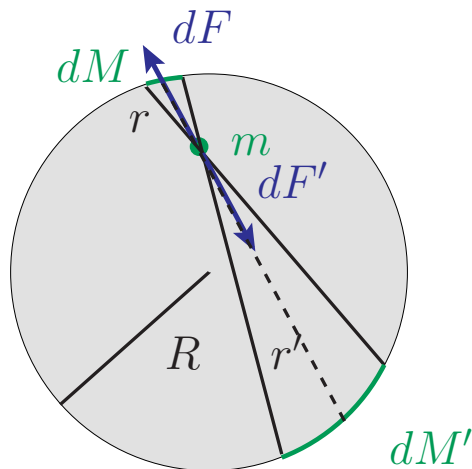
1) **la forza gravitazionale netta esercitata da un guscio sferico omogeneo di materia su di un oggetto esterno può essere calcolata come se tutta la massa del corpo fosse concentrata nel centro del guscio sferico.**



Per mostrarlo, basta scomporre il guscio in corone circolari: il contributo alla forza su m di tutta la corona è diretto verso il centro del guscio sferico.

La stessa cosa vale anche per una sfera omogenea di materia (come è approssimativamente la Terra): basta suddividere la sfera in tanti gusci sferici concentrici.

2) un guscio sferico omogeneo di materia non esercita alcuna forza gravitazionale su di un oggetto che si trovi al suo **interno**.



La massa è distribuita uniformemente sul guscio ma l'area intercettata dai due coni sulla superficie scala con il quadrato della distanza dal vertice del cono

$$dM = \text{densità di massa} \times \text{area} = \frac{M}{4\pi R^2} r^2 d\Omega$$

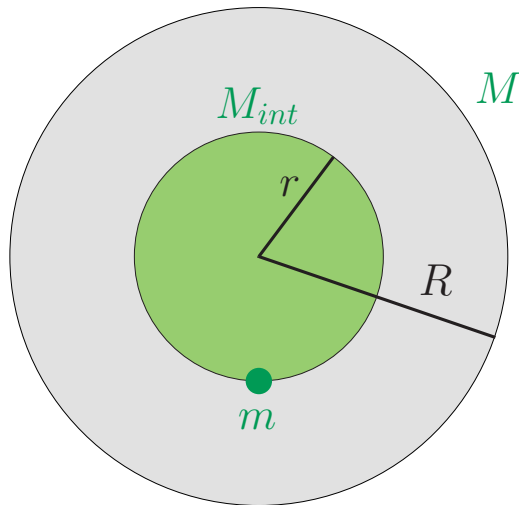
$d\Omega$ è l'angolo solido ed è lo stesso per le due superfici. R è il raggio del guscio.

Come risultato $|\vec{dF}| = G \frac{m dM}{r^2} = G \frac{m M}{4\pi R^2} d\Omega = |\vec{dF}'|$ e i due contributi si cancellano.

La forza su una massa posta dentro un guscio sferico uniforme è nulla.

Come applicazione di 1) e 2) si trova la forza su una massa m posta dentro una sfera piena di materia M distribuita uniformemente (come la Terra)

e di raggio R . Se r è la distanza di m dal centro della sfera, **la forza gravitazionale su m è dovuta solo alla massa M_{int} che si trova all'interno della sfera di raggio r :**



$$M_{int} = \text{densità} \times \text{volume} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$$

In conclusione:

$$|\vec{F}(r)| = G \frac{m M_{int}}{r^2} = G \frac{m M}{R^3} r \quad \text{per } r < R$$

$$|\vec{F}(r)| = G \frac{m M}{r^2} \quad \text{per } r > R$$

Il campo gravitazionale

La forza gravitazionale tra i corpi è presente anche quando questi non sono a contatto: si tratta di una **interazione a distanza**. Un modo utile per descrivere queste interazioni è quello di introdurre il concetto di **campo**.

Il campo gravitazionale è generato dalle masse presenti nello spazio: quando un'altra massa viene posta nel campo stesso essa risente di una forza data dal prodotto della sua massa per il valore del campo in quel punto.

Il campo gravitazionale generato dalla terra viene indicato con $\vec{g}$.

Un satellite di massa m posto nel campo gravitazionale della terra è soggetto ad una forza $\vec{F} = m\vec{g}$. Quindi il campo gravitazionale della terra in un punto a distanza r dal centro della Terra è

$$\vec{g} = G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad \text{diretto verso il suo centro.}$$

Per distanze piccole rispetto al raggio terrestre il campo gravitazionale è un campo uniforme di intensità pari a g e diretto lungo la verticale e verso il basso.

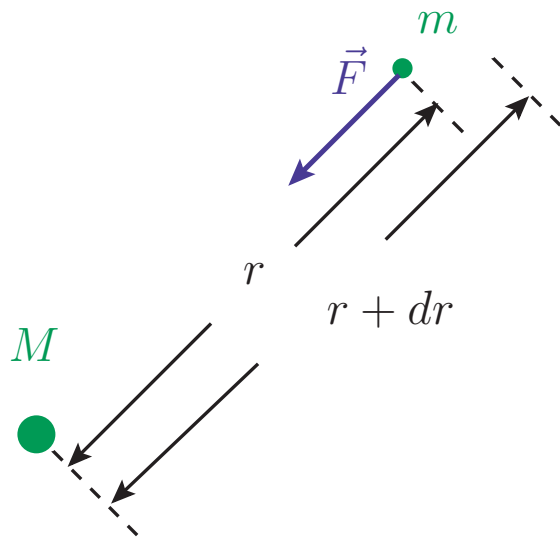
Il campo gravitazionale è un esempio di **campo vettoriale**: ad ogni punto è associato un vettore che dà l'intensità, la direzione e il verso del campo in quel punto: il concetto di campo è molto importante perchè permette di studiare, tra le altre, le forze elettriche e magnetiche tra cariche in moto.

Energia potenziale gravitazionale

Abbiamo introdotto il concetto di energia potenziale gravitazionale per il sistema Terra-oggetto. Ora generalizziamo questo concetto al caso di due oggetti di massa m e M , separati da una distanza r .

Mostriamo che la forza gravitazionale è una **forza conservativa**.

Il lavoro infinitesimo dL compiuto dalla forza gravitazionale esercitata da M su m quando la massa m si sposta dalla distanza r alla distanza $r + dr$ lungo la linea congiungente $\hat{r}$ è



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{GmM}{r^2}dr$$

(lo spostamento e la forza hanno la stessa direzione ma verso opposto).

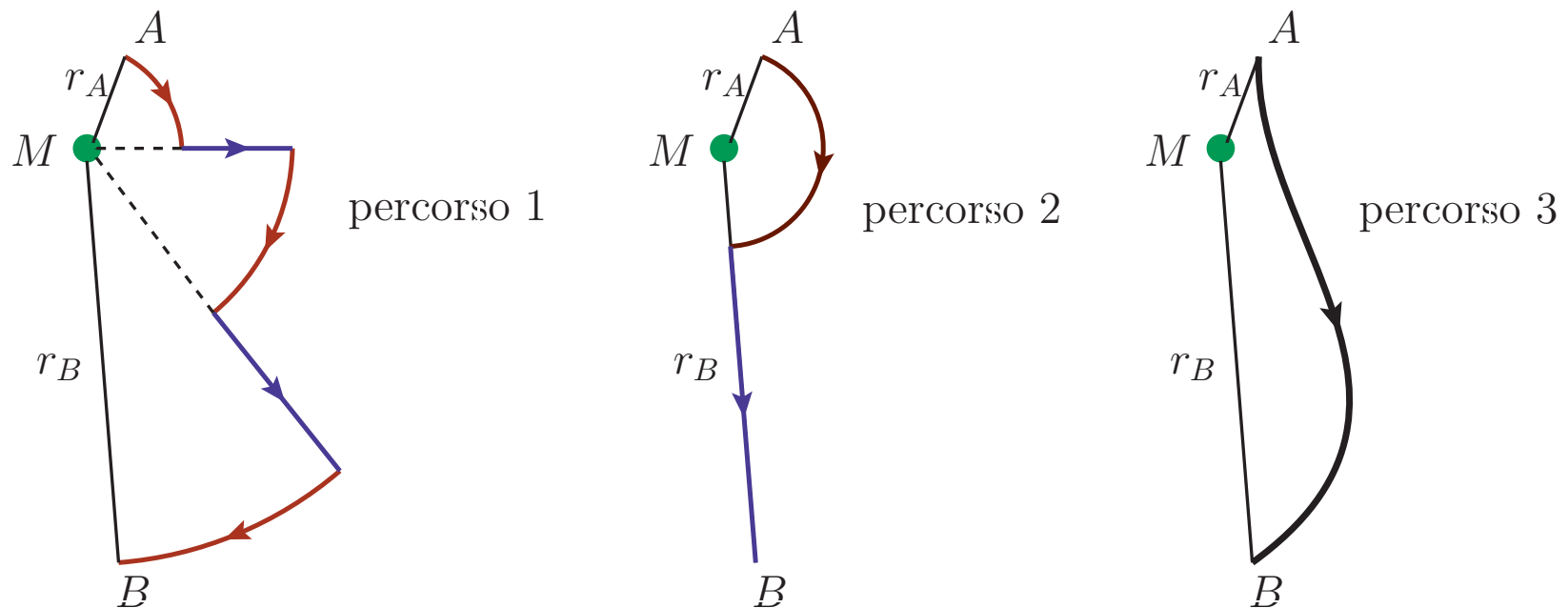
Se R_i e R_f sono le distanze iniziali e finali della massa m da M il lavoro totale è

$$W = \int_{R_i}^{R_f} \left(-\frac{GmM}{r^2} \right) dr = \frac{GmM}{r} \Big|_{R_i}^{R_f} = \frac{GmM}{R_f} - \frac{GmM}{R_i}$$

(negativo se $R_f > R_i$).

Il lavoro è indipendente dal percorso eseguito.

Una qualunque traiettoria di m tra A e B si può **scomporre in tratti che sono radiali** rispetto a M e tratti che sono archi di circonferenza di centro in M . Questi ultimi non contribuiscono al lavoro poichè $\vec{ds} \perp \vec{F}$. La somma dei contributi al lavoro lungo i raggi dà esattamente lo stesso risultato sia per il percorso 1) che per il percorso 2) e per un percorso arbitrario:



La forza gravitazionale è una forza conservativa e il lavoro dipende solo dagli estremi dell'integrale. È una **forza centrale**: dipende solo dalla distanza tra le due masse ed è diretta lungo la loro congiungente. **Le forze centrali sono conservative** (la forza di Coulomb tra cariche elettriche ha la stessa proprietà).

La variazione dell'energia potenziale gravitazionale è data da meno il lavoro fatto dalla forza gravitazionale.

Supponiamo che inizialmente m sia a una distanza infinita da M e che alla fine sia a una distanza r da M , quindi poniamo $R_i = \infty$ e $R_f = r$ nella formula di p.6

$$-[U(r) - U(\infty)] = \int_{\infty}^r dW = \frac{GmM}{r}$$

Se scegliamo come configurazione di riferimento a cui assegnare energia potenziale gravitazionale $U = 0$ quella in cui i due oggetti sono a distanza infinita si ha

$$U(r) = -\frac{GmM}{r} \quad \text{energia potenziale gravitazionale}$$

È consistente con quanto trovato per la variazione dell'energia gravitazionale del sistema m -Terra?

$$U(h) - U(0) = -\frac{GmM_T}{R_T + h} + \frac{GmM_T}{R_T} = -\frac{GmM_T}{R_T} \frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}} + \frac{GmM_T}{R_T}$$

per $h \ll R_T$ possiamo utilizzare lo sviluppo in serie $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$ ottenendo

$$U(h) - U(0) = mgh \quad (\text{ricordare che } g = \frac{GM_T}{R_T^2})$$

Una forza centrale $F(r)$ è legata alla corrispondente energia potenziale da una relazione simile a quanto visto nel caso unidimensionale, cioè

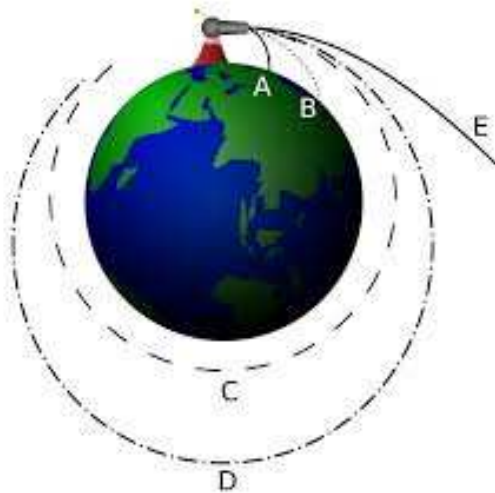
$$F(r) = -\frac{dU}{dr}$$

Nel caso dell'energia potenziale gravitazionale si ritrova

$$-\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

dà esattamente la forza gravitazionale di Newton.

Moto orbitale



Quali sono i possibili percorsi di un proiettile sparato da un cannone su una montagna molto alta? dipende dalla velocità iniziale: se v è bassa ricade sulla Terra (casi A, B); se $v = v_c$ il proiettile si immette in un'orbita circolare (caso C) attorno alla terra, per velocità superiori l'orbita è ellittica (caso D), infine per ancora più grandi il proiettile lascia la Terra (caso E).

Velocità di fuga (dalla Terra): è il valore minimo della velocità iniziale di un oggetto che permette all'oggetto di sfuggire all'attrazione gravitazionale per arrestarsi teoricamente solo a distanza infinita.

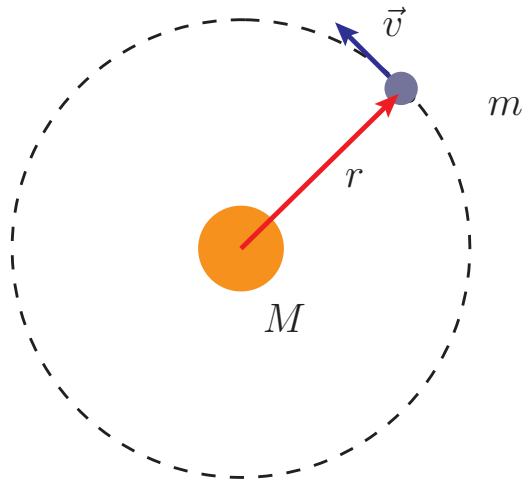
La forza gravitazionale è conservativa $\Rightarrow E_{mecc} = \text{costante}$

$$E^{(i)} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} \qquad E^{(f)} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \quad (v_0 \text{ è la velocità di arrivo})$$

$$E^{(f)} = E^{(i)} \qquad \Rightarrow \quad v_i^2 = v_0^2 + \frac{2GM_T}{R_T}$$

$$v_i \text{ minima si ha per } v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Energia di un pianeta (orbita circolare)



$$E_{mec} = K + U \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \quad U = -\frac{GMm}{r}$$

La velocità del satellite si determina dalla legge di Newton richiedendo che la forza di attrazione della terra sia uguale alla forza centripeta

$$\frac{GMm}{r^2} = ma_c = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow K = \frac{GMm}{2r}$$

quindi per un satellite si ha

$$U = -2K \Rightarrow E_{mec} = U + K = -\frac{GMm}{2r} = -K$$

negativa quindi il satellite non può mai abbandonare la Terra.

Satelliti geostazionari: hanno un periodo $T = 24 \text{ ore} = 6.64 \times 10^4 \text{ s}$.

Dal legame tra v e r si trova come scala il periodo con il raggio dell'orbita

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} r^{3/2}$$

usando il valore $GM_T = 3.99 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, si trova $r = 4.23 \times 10^7 \text{ m}$ circa 36000 Km dalla superficie della terra ($R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$).