

Onde meccaniche

Il concetto di onda entra in una molteplicità di fenomeni di Fisica:

- * **Meccanica** (onde elastiche, onde sonore),
- * **Fluidi** (onde superficiali in un liquido),
- * **Elettromagnetismo** (onde e.m. e quindi onde radio, X, luce visibile, γ , infrarosso, ultravioletto),
- * **Gravitazione** (Einstein),
- * **Fisica quantistica** (dualità onda-corpuscolo).

Vogliamo apprendere i rudimenti della descrizione matematica delle onde. Studiamo fenomeni quali la propagazione ondosa sulla superficie di un liquido inizialmente in quiete e in cui viene gettato un sasso. Vi sono due tipi di onde:

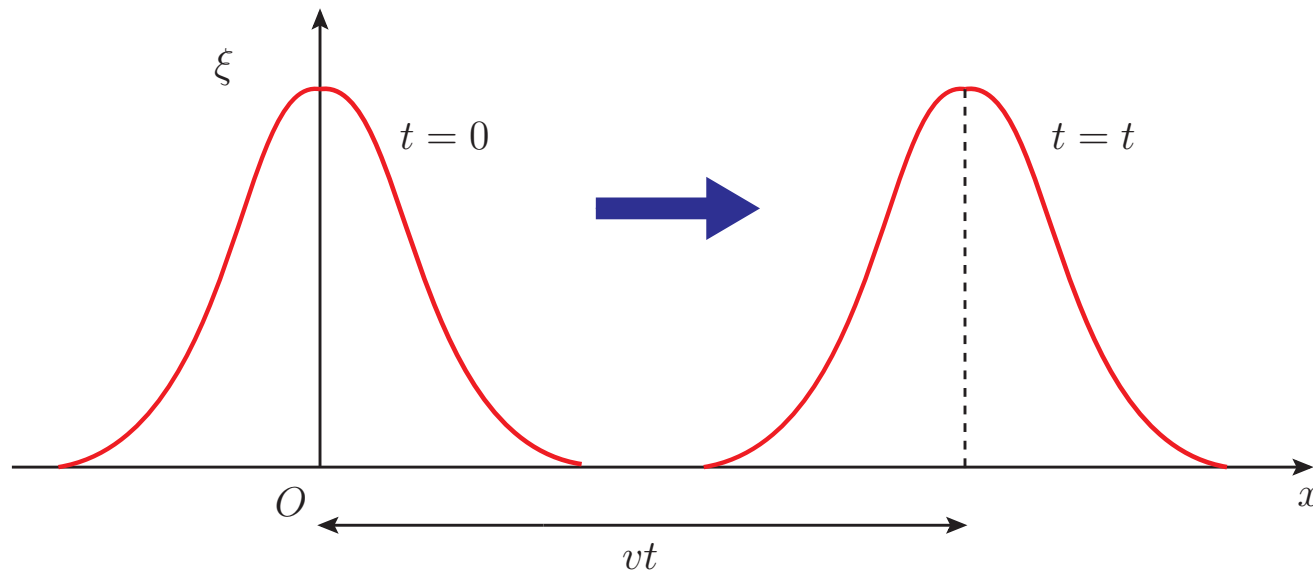
- ✓ quelle che vengono chiamate “onde stazionarie”, cioè onde che non si propagano,
- ✓ onde che si propagano a tutto lo spazio disponibile.

La descrizione completa di un'onda si presenta complessa perchè:

l'onda è un fenomeno esteso nello spazio e variabile nel tempo;
esiste una grande varietà di onde che differiscono sia per la natura di “ciò che oscilla”, sia per il “modo in cui ci lo fa” (es. onde trasversali e longitudinali).

Si introduce una funzione matematica ξ , detta funzione d'onda, dipendente dal tempo e dallo spazio, che descrive la grandezza che sta oscillando: l'interpretazione fisica e le unità di misura di ξ dipendono dalla natura dell'onda stessa.

Come primo esempio consideriamo un impulso che si propaga lungo una corda tesa (onde in una dimensione): fissiamo una corda ad un estremo e, mantenendola tesa, solleviamo bruscamente l'altro estremo, questa perturbazione si propaga lungo la corda



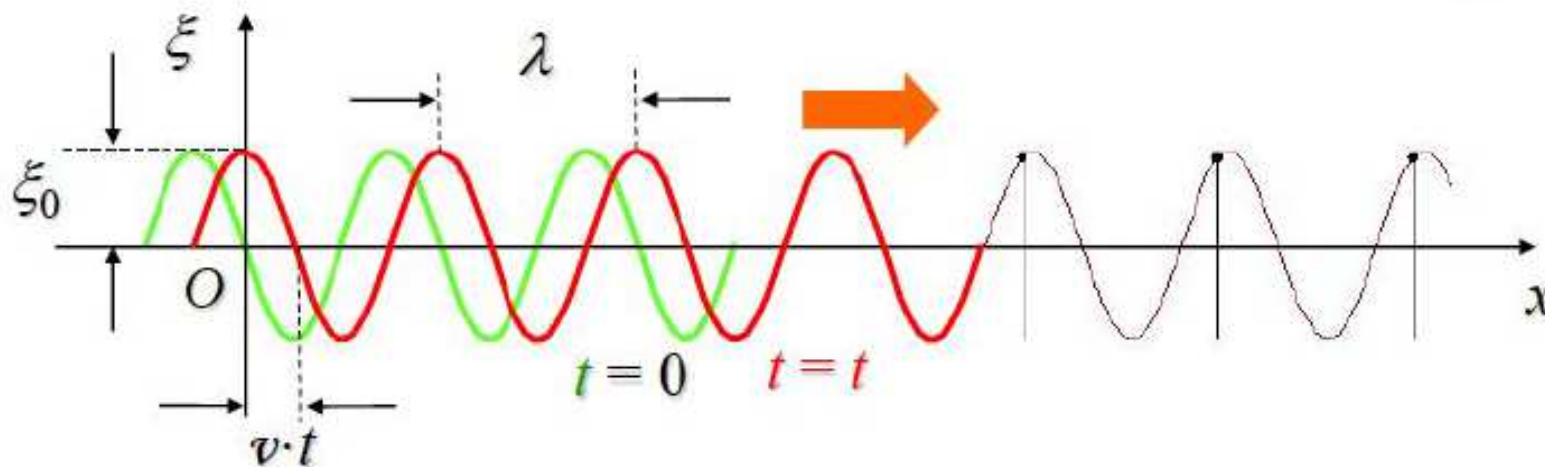
$$\xi(x, 0) = f(x) = \text{forma d'onda}$$

$$\text{nel punto } x = vt \text{ c'è la stessa forma d'onda: } \xi(x, t) = f(x - vt)$$

$x - vt$ è detta fase dell'onda;

$$\xi(x, t) = \text{cost} \Rightarrow x - vt = \text{cost} \quad \frac{dx}{dt} - v = 0 \Rightarrow v = \text{velocità di fase}$$

* Onda armonica



$$\xi(x) = \xi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

ξ_0 : ampiezza dell'onda; $T = \frac{\lambda}{v}$: periodo; $\lambda = vT$: lunghezza d'onda

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: frequenza angolare $k = \frac{2\pi}{\lambda}$: numero d'onda

✓ funzione d'onda armonica che si propaga verso destra

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha) \quad \left(\text{o verso sinistra: } \xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx + \omega t + \alpha) \right)$$

α costante di fase.

$\xi(x, t)$ soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

detta **equazione delle onde piane di D'Alembert**.

ξ è una funzione di due variabili, x e t .

Se fisso $t = \bar{t}$, ξ è solo funzione di x e posso calcolarne la derivata

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \text{derivata parziale di } \xi \text{ rispetto a } x \text{ (a } t \text{ fissato)}$$

Oppure, se fisso $x = \bar{x}$, è solo funzione di t e posso calcolarne la derivata

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \text{derivata parziale di } \xi \text{ rispetto a } t \text{ (a } x \text{ fissato)}$$

Il parametro v che compare nell'equazione è detto **velocità dell'onda**.

Ammette soluzioni del tipo $\xi(x, t) = f(x \pm vt)$,

es: l'onda armonica $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx \pm \omega t)$ con $\omega = kv$ è una particolare soluzione.

Vista nello spazio 3D, $f(x \pm vt)$ è un'onda piana: a un fissato t tutti i punti del piano $x = x_0 = cost$ hanno la stessa fase.

L'equazione delle onde è lineare in ξ : somma di soluzioni è ancora soluzione.

✱ **Sovrapposizione di onde armoniche**

Onde armoniche provenienti da sorgenti diverse che si propagano nello stesso mezzo (quindi ampiezze in generale diverse e velocità di propagazione uguale):

$$\xi_1(x, t) = \xi_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1)$$

$$\xi_2(x, t) = \xi_{02} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2)$$

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$$

Si possono avere diversi fenomeni.

Ad esempio quando le ampiezze sono uguali ($\xi_{01} = \xi_{02} = \xi_0$) si ha

- ✓ stessa frequenza, stesso verso: **interferenza**
- ✓ stessa frequenza, verso opposto: **onda stazionaria**
- ✓ frequenza poco diversa, stesso verso: **battimenti**

* Interferenza

$$\xi(x, t) = \xi_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx - \omega t + \phi)] = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

ampiezza $\mathcal{A} = 2\xi_0 \cos(\phi/2)$ dipendente a ϕ ma **stessa frequenza ω** .

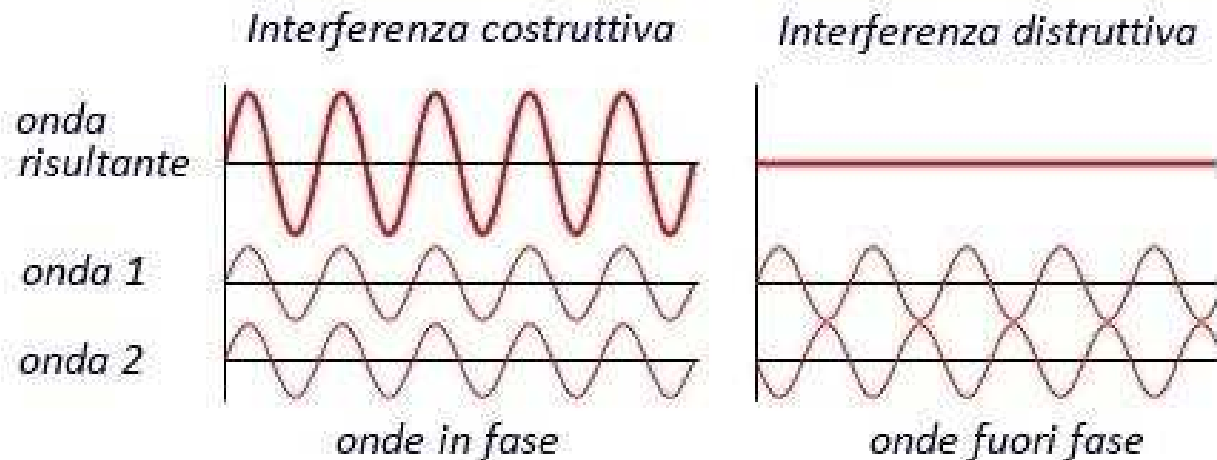
✓ **Interferenza costruttiva:** componenti in fase

$$\phi = 2\pi n, \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow |\mathcal{A}| = 2\xi_0$$

✓ **Interferenza distruttiva:** componenti in opposizione di fase

$$\phi = (2n + 1)\pi, \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow |\mathcal{A}| = 0 \text{ (il punto } x \text{ è in quiete)}$$

✓ in generale $0 \leq |\mathcal{A}| \leq 2\xi_0$



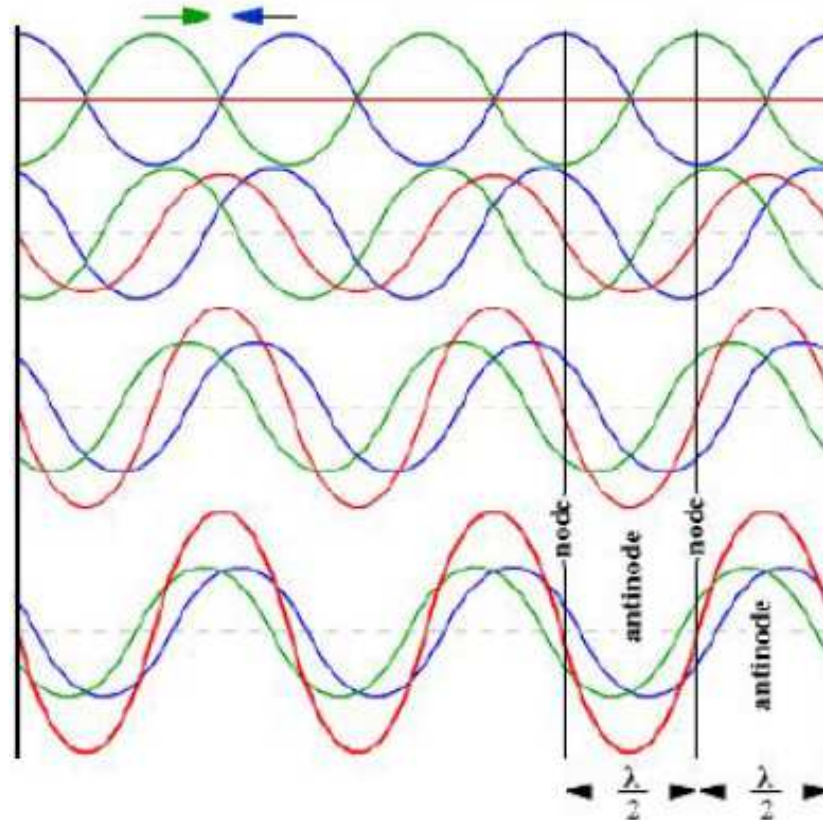
* Onda stazionaria

$$\xi(x, t) = \xi_0 [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = 2\xi_0 \cos(kx) \cos(\omega t)$$

funzione d'onda stazionaria con **ampiezza** $\mathcal{A} = 2\xi_0 \cos(kx)$ dipendente da x
Non c'è propagazione ma solo oscillazione nel tempo

punti tali che $kx = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, cioè $x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \rightarrow \mathcal{A} = 0$ nodi

punti tali che $kx = n\pi$, cioè $x = \frac{n}{2}\lambda \rightarrow |\mathcal{A}| = 2\xi_0$ antinodi



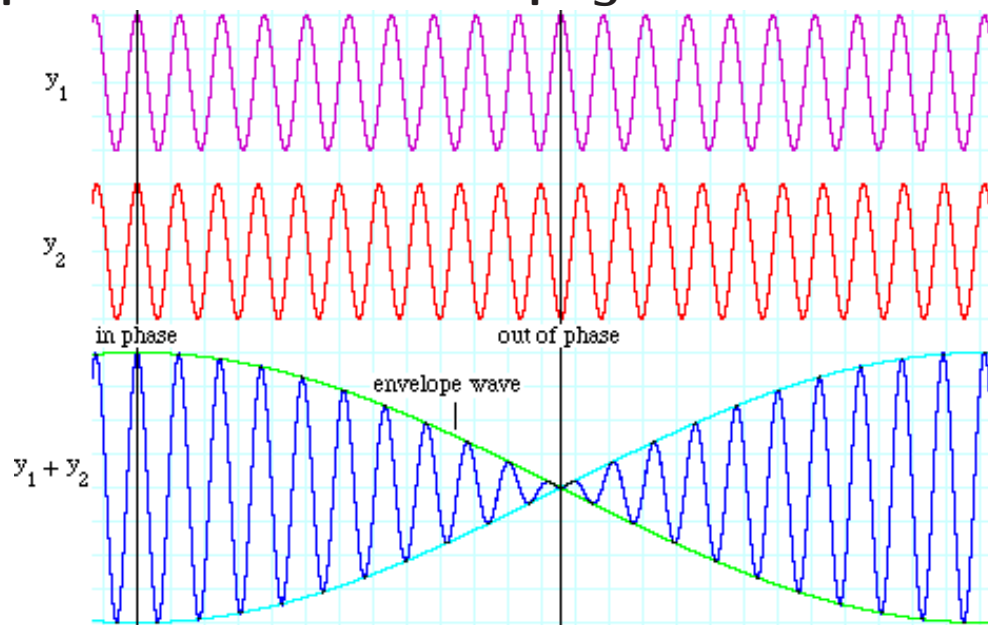
* Battimenti

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = \xi_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)] \\ &= 2\xi_0 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\end{aligned}$$

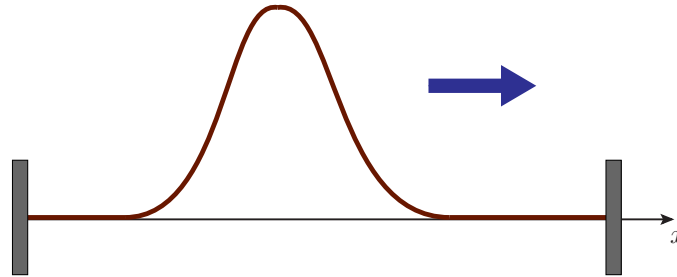
se fissiamo $x = 0$

$$\xi(0, t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \equiv \mathcal{A}(t) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

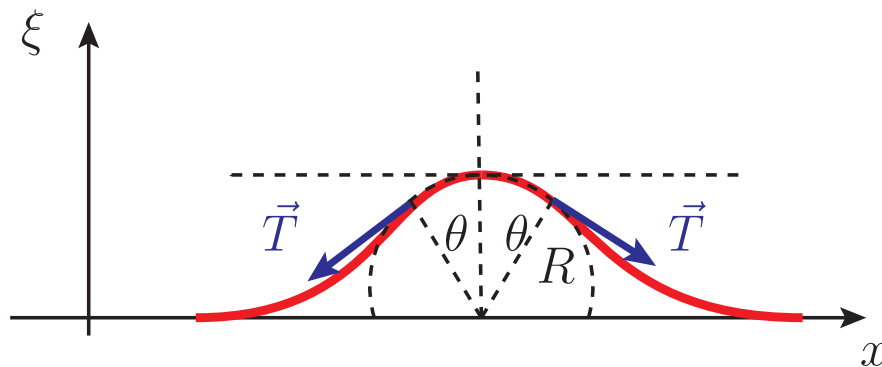
se ω_1 e ω_2 sono poco diverse $\mathcal{A}(t)$ è una funzione che varia lentamente con t e modula la propagazione mentre l'onda ha una pulsazione uguale alla media delle due pulsazioni che la compogono



* propagazione di un'onda trasversale su una corda



All'equilibrio la corda è tesa e parallela all'asse x . Consideriamo una piccola perturbazione della corda sempre tesa, che si propaga da un capo all'altro della corda (che sono fissati). $\xi(x, t)$ denota lo spostamento dalla posizione di equilibrio. Approssimiamo il piccolo tratto di corda dl fuori dall'equilibrio con un arco di circonferenza: $dl = 2\theta R$. Su dl agiscono le forze di tensione:



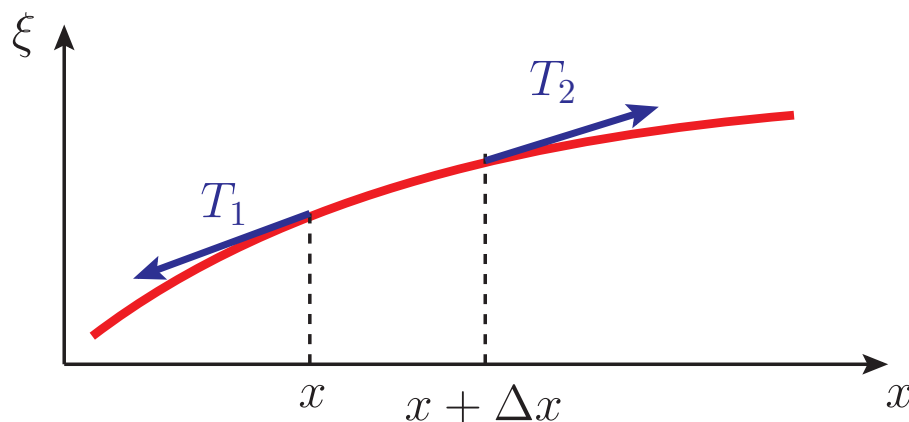
le componenti lungo x si cancellano, mentre le componenti lungo la direzione trasversa, ξ , si sommano

$$\begin{aligned} F_{\xi} &= 2T \sin \theta \sim T2\theta \\ &= T \frac{dl}{R} = dm \frac{v^2}{R} = \rho dl \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

(ρ densità lineare della fune). La velocità di propagazione della perturbazione è $v = \sqrt{T/\rho}$.

$\xi(x, t)$ soddisfa all'equazione delle onde piane.

Vediamo come si deriva dalle equazioni di Newton. Consideriamo una fune elastica di densità lineare ρ . Le oscillazioni della corda sono di piccola ampiezza e lo spostamento della corda è lungo la verticale (oscillazioni trasversali). La tensione della fune T è da considerare costante lungo la fune (indipendente da x e da t). Se spostiamo la fune dalla posizione di equilibrio, la tensione agisce come forza di richiamo. Indichiamo con θ_1 e θ_2 l'inclinazione della fune nei punti separati dalla distanza Δx .



Sul frammento di fune agisce nella direzione ξ una forza $T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1$ che per angoli molto piccoli è circa uguale a $T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1$.

Ma $\tan \theta(x)$ in ogni punto è la derivata di $\xi(x, t)$ rispetto a x . Quindi la forza che agisce sul tratto di fune è

$$T \frac{\partial \xi(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \sim T \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \Delta x$$

e questa è da porre uguale all'accelerazione del frammento di fune $\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$ per la sua massa $\rho \Delta l \simeq \rho \Delta x$: ossia

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}, \quad \text{con} \quad v^2 = \frac{T}{\rho} \quad \text{eq. di D'Alembert}$$

Energia e potenza di un'onda

Quando facciamo oscillare la corda forniamo energia. Questa energia si propaga con l'onda come energia cinetica e potenziale.

Ci fissiamo su un tratto di corda inizialmente è in quiete poi inizia a muoversi (quindi c'è una energia cinetica) con un moto elastico (il tratto di corda si allontana dalla posizione di equilibrio, quindi viene richiamato verso di essa) e quindi è anche presente una energia potenziale associata all'allungarsi ed accorciarsi degli elementi della corda necessari per far oscillare gli elementi della corda stessa.

Consideriamo la porzione di corda Δl come in precedenza.

Possiamo attribuirle una energia cinetica:

$$\frac{1}{2} \rho \Delta x \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

Il lavoro fatto dalla tensione T per deformare la corda da Δx a Δl è

$$T \cdot (\Delta l - \Delta x) = T \left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta \xi)^2} - \Delta x \right)$$

siccome $|\Delta\xi/\Delta x| \ll 1$ si può sviluppare la radice e trovare per l'energia energia potenziale

$$\frac{1}{2}\Delta x T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

Quindi la densità di energia meccanica della corda è

$$\epsilon(x, t) = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

mentre l'energia di tutta la corda è

$$E(t) = \int_0^L dx \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Per un'onda armonica $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ i due contributi sono uguali (usando l'equazione delle onde e $v = \sqrt{T/\rho} = \omega/k$) e la densità di energia totale della corda

$$\epsilon = \rho \omega^2 \xi_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Notare che gli elementi in cui la corda ha il massimo spostamento (i.e. $kx - \omega t = n\pi$) hanno energia nulla, quelli in cui la corda è vicina alla posizione di equilibrio $\xi \simeq 0$ hanno energia massima.

Il valor medio su un periodo T dell'onda

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x, t) dt = \frac{1}{2} \Delta x \rho \omega^2 \xi_o^2$$

è indipendente dalla posizione.

Torniamo al caso generale: deriviamo l'energia rispetto a t :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^L dx \left[\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} \right] = T \int_0^L dx \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} \right] \\ &= T \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] = T \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_L - T \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_0 \end{aligned}$$

La quantità

$$S = -T \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

rappresenta il **flusso di energia trasportato dall'onda**: l'energia può variare solo perchè energia entra o esce dagli estremi della corda:

$$\frac{dE}{dt} = S(L) - S(0)$$

La densità di energia ϵ soddisfa a

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{equazione di continuità}$$