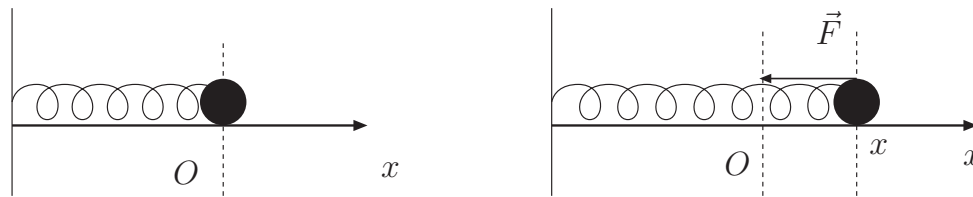


Moti oscillatori

Fenomeni a carattere periodico sia di tipo macroscopico (pendolo, molle, ...) che microscopico (propagazione di onde nei solidi) sono descritti da un formalismo matematico simile.

Sono moti che si ripetono a intervalli uguali di tempo: il moto avviene attorno a una posizione di equilibrio stabile, c'è una forza di richiamo che tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio come nella molla.



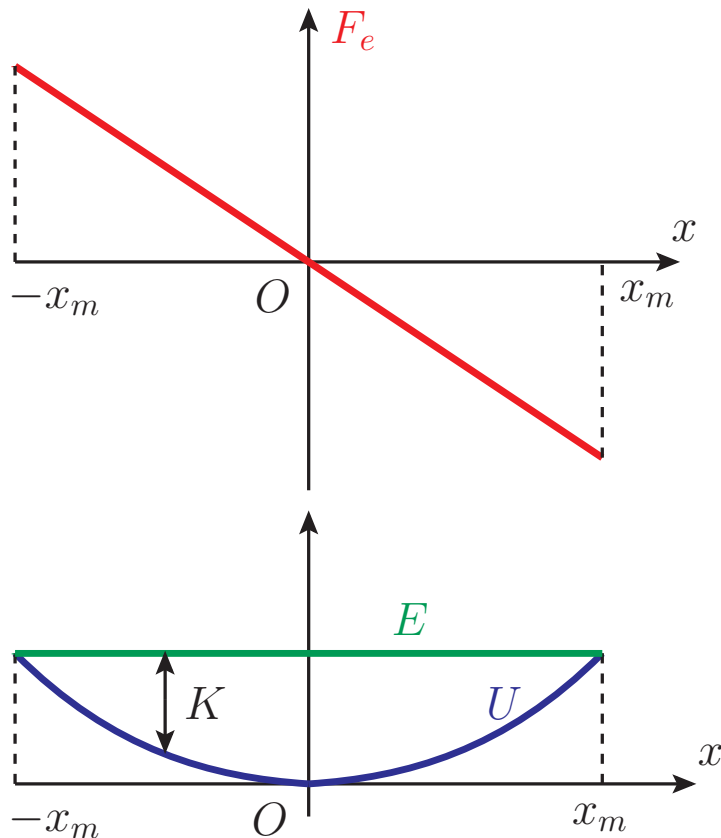
Sulla molla agisce una forza $F = -kx$ diretta in verso opposto a quello del vettore $\vec{x}$ che rappresenta l'allungamento (o l'accorciamento) rispetto alla lunghezza a riposo. Il moto è regolato dall'equazione

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{equazione differenziale del moto armonico}$$

la cui soluzione è

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{con } \omega = \sqrt{k/m}$$

x_m e φ sono delle costanti che dipendono dalle condizioni iniziali, es. $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$.



$$F_e(x) = -kx \text{ lineare}$$

$$U(x) = - \int F_e(x) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

moto armonico semplice

In assenza di forze dissipative

E si conserva

$$U(t) = \frac{1}{2} kx(t)^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} mv(t)^2 = \frac{1}{2} mx_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$E = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 = \text{costante}$$

* Pendolo fisico

Corpo rigido incernierato in modo da poter ruotare in un piano verticale



Momento della forza di richiamo

$$\tau_z = -Mgd \sin \theta = I_z \alpha_z$$

per piccoli angoli: $\sin \theta \sim \theta$

$$-Mgd \theta = I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$$

con

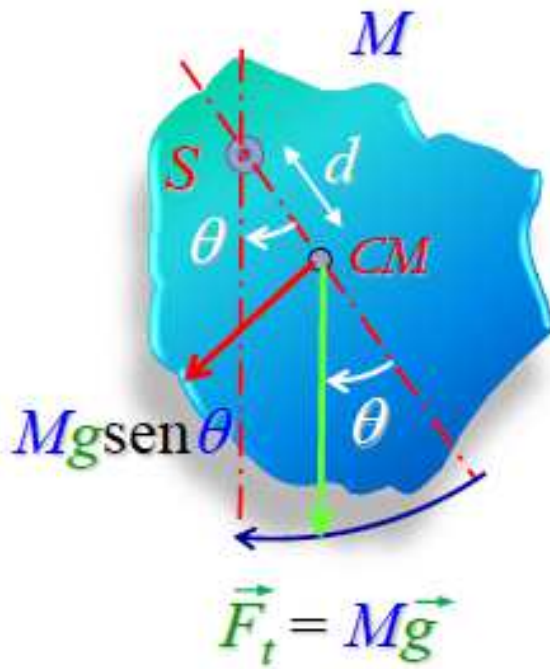
$$\omega \equiv \sqrt{\frac{Mgd}{I_z}}$$

moto armonico semplice con pulsazione ω :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

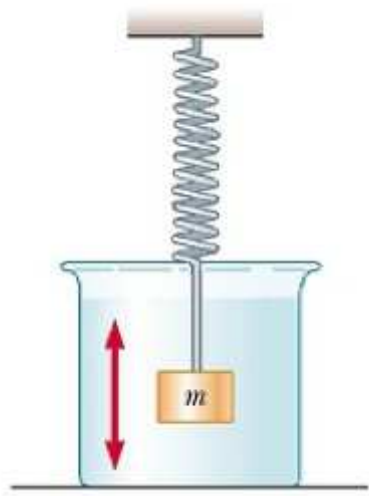
Per il pendolo semplice (massa M attaccata a un filo lungo l) si ritrova il risultato precedente: in questo caso $I_z = Ml^2$ e $d = l$ quindi $\omega = \sqrt{g/l}$.

Equivalentemente: **il pendolo fisico ha la stessa frequenza e periodo di un pendolo semplice di massa M concentrata a una distanza l^* dall'asse di rotazione:**

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_z}} = \sqrt{g/l^*} \quad l^* = \frac{I_z}{Md}$$


*Moto armonico smorzato

Il moto dell'oscillatore viene rallentato da una forza impressa dall'esterno,



come ad esempio un blocco appeso a una molla e immerso in un liquido viscoso che esercita una forza frenante: lentamente, l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce.

Supponiamo che la forza di smorzamento sia proporzionale alla velocità del blocco

$$F_{sm} = -bv \quad \text{si oppone al moto}$$

b è detta **costante di smorzamento** e dipende dalle

caratteristiche del sistema (liquido, forma del corpo,...). Trascurando per semplicità la forza di gravità (o supponendo che il sistema sia orizzontale) l'equazione del moto del blocco è

$$-bv - kx = ma \quad \text{cioé} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

con $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Come per ogni equazione differenziale lineare a coefficienti costanti la soluzione è da ricercarsi nella forma

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

Una volta inserita questa espressione nell'equazione si trova un'equazione algebrica per α

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

la cui soluzione dipende dai parametri γ e ω_0 . Ci sono diversi casi:

- ① se $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ l'equazione ha due soluzioni α_1 e α_2 reali: in questo caso l'attrito domina il movimento e il moto è smorzato senza oscillazioni;
- ② se $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ l'equazione ha due soluzioni complesse e il moto è oscillatorio smorzato. La soluzione dell'equazione differenziale è

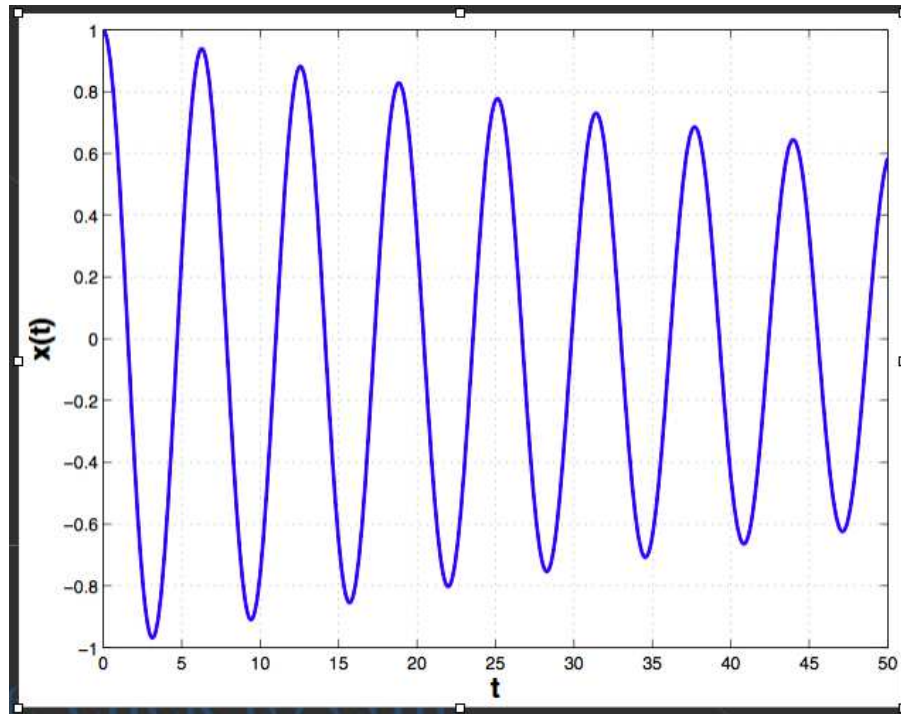
$$x(t) = x_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_{sm} t + \varphi)$$

dove x_m e φ sono delle costanti (l'ampiezza e la fase dell'oscillazione) e

$$\omega_{sm} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Se lo smorzamento è debole $\gamma \ll \omega_0$, si ha $\omega_{sm} \sim \omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsazione è approssimativamente uguale a quella in assenza di smorzamento ma l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce nel tempo in modo esponenziale:

$$x_m \rightarrow x_m e^{-\gamma t}$$



③ se $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ in questo caso la soluzione generale è

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

praticamente indistinguibile dal primo caso.

* Oscillazioni forzate

Oscillatore armonico perturbato da una forza esterna periodica. La forma generale dell'equazione del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti ma non omogenea: la soluzione generale è data dalla soluzione generale dell'equazione omogenea associata (quella con $F_0 = 0$) a cui bisogna aggiungere una soluzione particolare dell'inomogenea:

$$x(t) = x_{sm}(t) + x_p(t)$$

Infatti se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni dell'equazione inomogenea, la loro differenza $x_1(t) - x_2(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea.

Il primo contributo $x_{sm}(t)$ è una oscillazione smorzata e per t grandi diventa trascurabile, quindi per $t \rightarrow \infty$: $x(t) \rightarrow x_p(t)$.

Per una forza esterna periodica di pulsazione ω la soluzione particolare è

$$x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

l'ampiezza e lo sfasamento dipendono dalla pulsazione ω della forza esterna periodica (la soluzione è proporzionale alla forza esterna con un ritardo).

Imponendo che $x_p(t)$ sia soluzione si trovano $A(\omega)$ e $\varphi(\omega)$:

$$\tan \varphi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

da cui si vede che tanto più la forza esterna ha una frequenza vicina a quella naturale dell'oscillatore tanto più grande è l'ampiezza del moto che ne risulta.

Si noti che l'ampiezza e lo sfasamento della soluzione a regime non dipendono dalle condizioni iniziali (queste entrano nella parte transitoria del moto $x_{sm}(t)$).

Se la frequenza propria del sistema ω_0 è poco diversa dalla frequenza della forza esterna, il sistema entra in **risonanza**:

$$\omega_0 = \omega \Rightarrow \tan \varphi \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

e l'ampiezza diventa molto grande

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}$$

soprattutto per piccoli valori dello smorzamento:

