

Onde stazionarie: vibrazione della corda di violino

Studiamo le oscillazioni di una corda di violino fissata alle due estremità e tenuta a una tensione T regolando la chiavetta. Cerchiamo soluzioni periodiche nel tempo dell'equazione d'onda, cioè della forma

$$\xi(x, t) = f(x) \sin(\omega t + \phi)$$

sostituendo nell'equazione delle onde si trova un'equazione per $f(x)$:

$$f''(x) - \frac{\omega^2}{v^2} f(x) = 0$$

È l'equazione di un oscillatore semplice che ha come soluzione

$$f(x) = C \sin(k(x - x_0))$$

con $k = \omega/v$ e con C e x_0 costanti arbitrarie. Dobbiamo richiedere che la corda stia fissa alle estremità e cioè (se la corda è lunga L) $f(0) = f(L) = 0$. Queste condizioni fissano la costante x_0 e i numeri d'onda k permessi:

$$x_0 = 0 \text{ e } \sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Il numero n è detto **armonica**. In altre parole le lunghezze d'onda permesse soddisfano la relazione

$$n\lambda = 2L$$

La lunghezza d'onda più lunga (o equivalentemente la frequenza più bassa) corrisponde a $n = 1$ è detta **modo fondamentale o prima armonica** e si ha per $\lambda = 2L$. La seconda armonica richiede $\lambda = L$, la terza armonica richiede $\lambda = \frac{2}{3}L$ e così via.

Abbiamo così ricavato tutte le possibili frequenze di vibrazione della corda: per la frequenza più bassa ($n = 1$)

$$k = \frac{\pi}{L} \rightarrow \omega = \frac{\pi v}{L} = \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

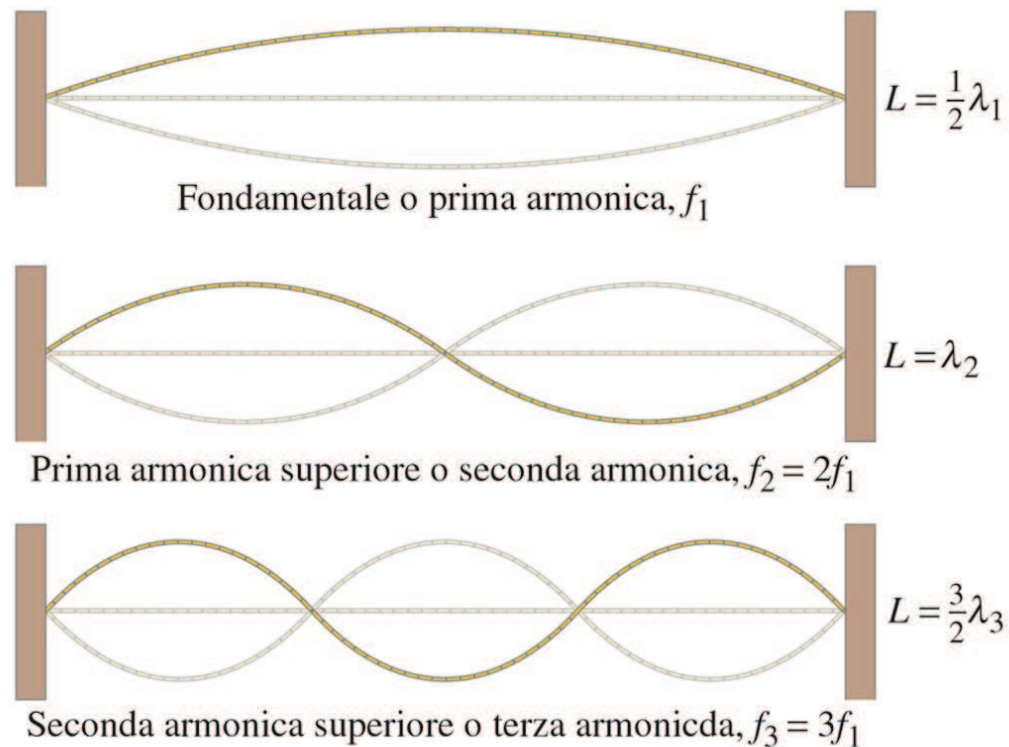
con valori ragionevoli dei parametri: $\mu = 20 \text{ g/m}$, $L = 30 \text{ cm}$, $T = 200 \text{ N}$, si trova

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 166.4 \text{ Hz}$$

che è un valore tipico degli strumenti a corda.

Quando una corda vibra ad una delle frequenze armoniche, essa genera un'onda sonora alla stessa frequenza. Ogni nota emessa dagli strumenti a corde corrisponde ad un'onda stazionaria con una precisa frequenza di vibrazione. Ad esempio la nota LA del diapason corrisponde alla frequenza di 440 Hz, la nota DO centrale alla frequenza di 262 Hz.

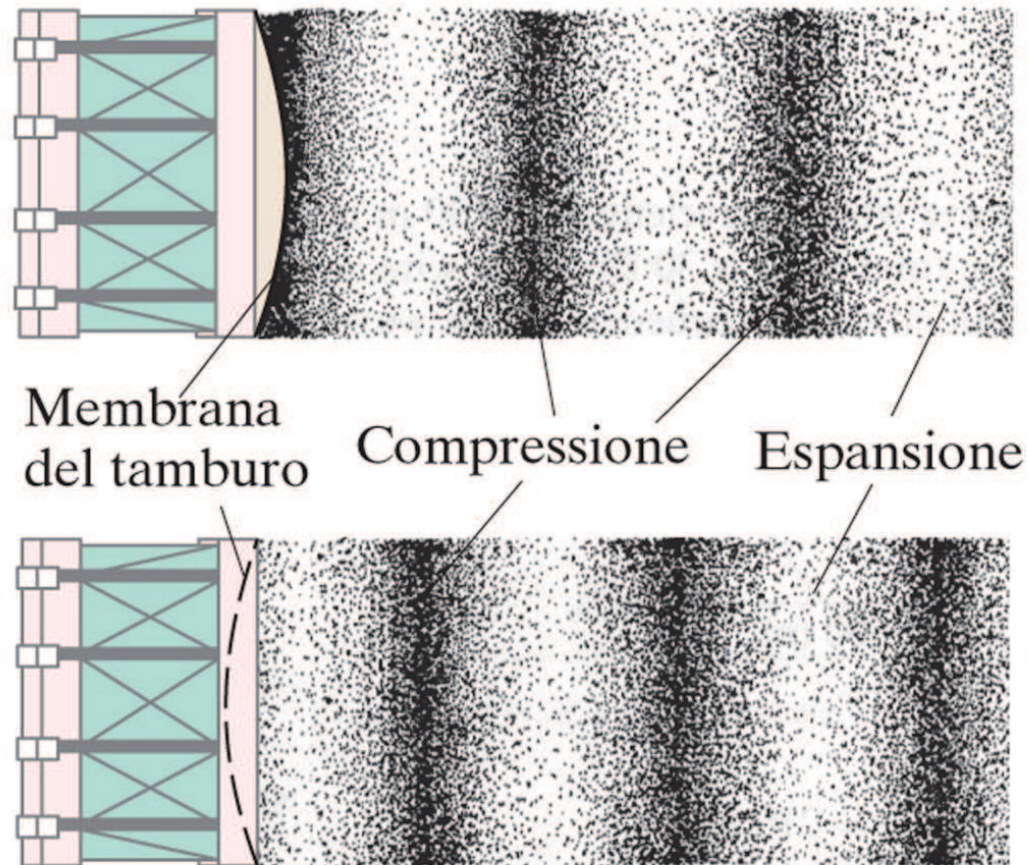
Onde stazionarie in una corda vibrante



Agli estremi della corda vi è sempre un nodo. La fondamentale possiede un solo ventre al centro, la prima armonica superiore ha due ventri separati da un nodo, etc

Le armoniche hanno frequenza multipla della frequenza fondamentale.

Onde sonore



Produzione e propagazione di un'onda sonora (onda longitudinale: l'oscillazione è nella stessa direzione della direzione di propagazione). Le due figure mostrano l'onda a due differenti istanti di tempo.

Se comprimiamo un gas contenuto in un cilindro chiuso da uno stantuffo, si propaga un'onda di compressione si ha cioè una variazione locale della densità dell'aria, o equivalentemente della pressione, che si propaga lungo il cilindro, si tratta di **un'onda longitudinale**.

Lo spostamento dall'equilibrio in un punto ad un determinato istante di tempo è descritto da

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

che soddisfa all'equazione delle onde piane

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{con velocità} \quad v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

β è detto **modulo di compressibilità isoterma**.

In condizioni standard ($T = 273.15 \text{ K}$, $p = 1 \text{ atm}$) in aria ($\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$), $v = 331.61 \text{ m/s}$. Mentre a temperatura ambiente (20°C) la velocità del suono in aria è $v = 343 \text{ m/s}$.

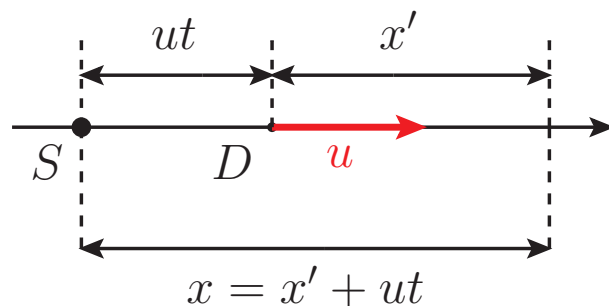
In questo caso l'ampiezza ξ_0 dell'onda è legata all'intensità sonora; mentre la frequenza $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ dell'onda determina il tono (o altezza) del suono (negli strumenti a corda questa è un multiplo dell'armonica fondamentale e può essere variata variando L o la velocità dell'onda, che a sua volta è legata alla tensione).

Intervallo di udibilità nell'uomo: da circa 20 Hz a circa 16000 Hz .

* L'effetto Doppler

Un'onda della forma considerata precedentemente $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ è osservata da un osservatore D (rilevatore). Se sia la sorgente dell'onda che l'osservatore sono in quiete rispetto all'aria, la frequenza osservata è uguale a quella della sorgente ω .

Se la sorgente è fissa mentre l'osservatore è in moto rispetto all'aria con velocità u :



l'osservatore descriverà l'onda come la $\xi(x, t)$ riferita alle sue coordinate $x' = x - ut$, dunque

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \cos(k(x' + ut) - \omega t) \\ &= \xi_0 \cos(kx' - (\omega - uk)t)\end{aligned}$$

Questo significa che per l'osservatore in moto con velocità u la frequenza dell'onda è

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{uk}{\omega}\right) = \omega \left(1 - \frac{u}{v}\right)$$

Si trova quindi che **la frequenza percepita dall'osservatore è minore se si sta allontanando dalla sorgente** (quindi la sua velocità è nella stessa direzione di propagazione dell'onda) **e maggiore nel caso contrario.**

L'altro caso è quello in cui l'osservatore è fermo e la sorgente in movimento rispetto all'aria. Supponiamo che la sorgente viaggi verso il ricevitore con velocità u e che all'istante $t = 0$ si trovi a una distanza D . Sia T il periodo dell'onda emessa. Il massimo dell'onda impiega un tempo

$$t_1 = \frac{D}{v_s} \text{ a raggiungere il ricevitore;}$$

Il massimo successivo viene emesso all'istante T quando la sorgente si è spostata di uT e quindi a una distanza $D - uT$ dal rivelatore e arriverà un tempo

$$t_2 = T + \frac{D - uT}{v_s}$$

La distanza tra i due massimi per il ricevitore è quindi

$$t_2 - t_1 = T\left(1 - \frac{u}{v_s}\right)$$

per il ricevitore è come se il suono avesse una pulsazione ($\omega = 2\pi/T$)

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{u}{v_s}}$$

quando la sorgente è in moto verso di lui con velocità u : **la frequenza percepita dall'osservatore è maggiore se la sorgente si sta avvicinando e minore se si sta allontanando.**

In generale si ha dunque

$$\omega' = \omega \frac{v_s \pm u_{ric}}{v_s \pm u_{sorg}}$$

dove la regola generale per scegliere i segni è che la frequenza aumenta se sorgente e ricevitore si avvicinano, diminuisce se si allontanano, ma la formula precisa dipende da chi è in movimento.

Questo effetto è noto come **effetto Doppler** e sussiste anche per le onde elettromagnetiche (microonde, onde radio, luce visibile). Ovviamente in questo caso, siccome la velocità della luce è $c \sim 3 \times 10^8 m/s$, il rapporto u/c è sempre piccolissimo per velocità delle sorgenti o degli osservatori tipiche della nostra esperienza quotidiana, mentre per le onde sonore u/v_s è abbastanza grande da permetterne l'osservazione.

Ad esempio viaggiando a $260 km/h$ verso la sorgente sonora un La si percepisce come un Do#

Esercizio: Un pipistrello vola e cerca le prede emettendo e ricevendo ultrasuoni. Gli ultrasuoni sono onde sonore di una frequenza tale che l'orecchio umano non può sentire. Supponiamo che la frequenza degli ultrasuoni emessi dal pipistrello sia $\omega = 82.52 \text{ kHz}$ e che il pipistrello emetta questi ultrasuoni mentre sta volando con una velocità $v_p = 9.00 \text{ m/s}$ verso una mosca che sta volando con $v_m = 8.00 \text{ m/s}$ nella stessa direzione e verso. Qual'è la frequenza rivelata dal pipistrello dell'onda riflessa dalla mosca (l'onda riflessa dalla mosca ha la stessa frequenza dell'onda incidente sulla mosca)?

La mosca rileva una frequenza (la sorgente si avvicina il rivelatore si allontana)

$$\omega' = \omega \frac{v_s - v_m}{v_s - v_p} = 82.52 \text{ kHz} \frac{343 - 8}{343 - 9} = 82.77 \text{ kHz}$$

ed emette onde con la stessa frequenza che vengono rilevate dal pipistrello. In questo caso la sorgente si allontana e il rilevatore si avvicina

$$\omega'' = \omega \frac{v_s + v_p}{v_s + v_m} = 82.52 \text{ kHz} \frac{343 + 9}{343 + 8} = 83.00 \text{ kHz}$$