Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2014-2015

Fisica 1



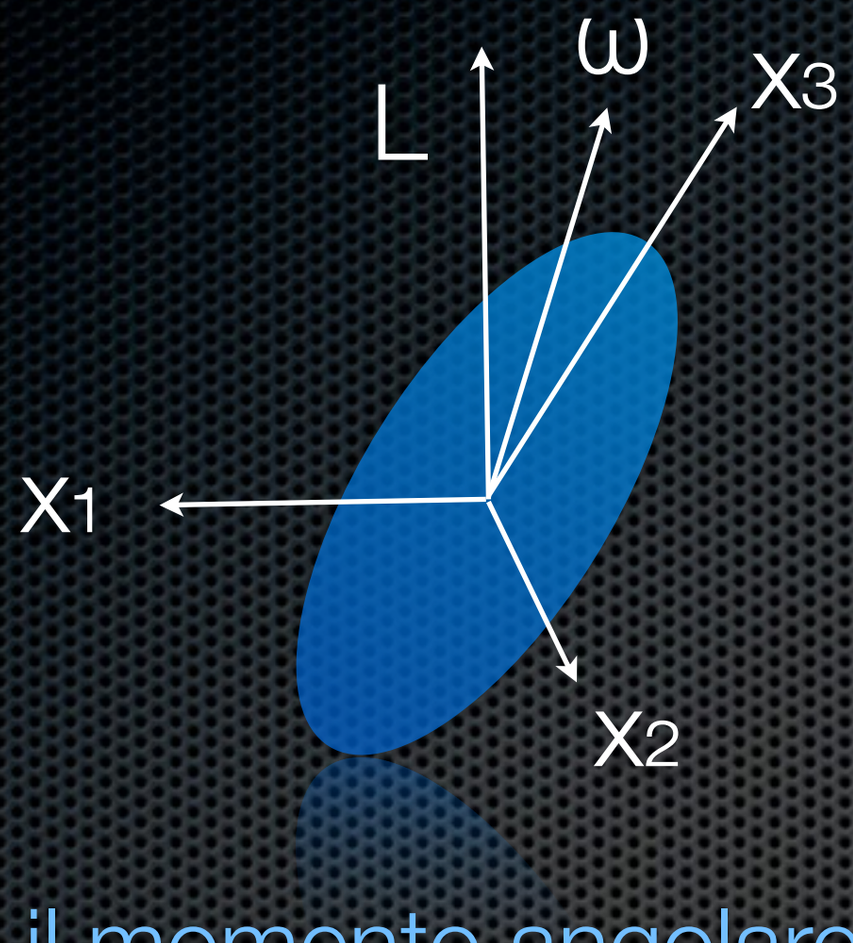
Prof. Enrico Onofri, titolare del corso

Dr. Emilia Liviotti, esercitazioni

20 aprile 2015

Concludiamo oggi lo studio del moto del corpo rigido. Alcune caratteristiche del moto sono abbastanza familiari dal comportamento di oggetti comuni, quali le trottole e i giroscopi. La trattazione matematica è tuttavia alquanto complessa. Vedremo solo alcuni aspetti elementari.

Consideriamo un CR che abbia momenti principali id inerzia I_1, I_2, I_3, di cui i primi due coincidono $I_1=I_2$. Questa condizione è tipica di un oggetto con simmetria di rotazione attorno a un asse, la tipica trottola. Il moto libero, in assenza di gravità e di vincoli risulta abbastanza semplice.



Sia **L** il momento angolare del CR, **ω** la velocità angolare. Scegliamo gli assi in modo che l'asse 2 sia ortogonale all'asse di simmetria e al momento angolare, **L**, che è in assenza di forze esterne costante nel tempo. Allora **ω** giace nel piano che contiene **L** e gli assi 1 e 3. L'atto di moto istantaneo è descrivibile allora cosí...

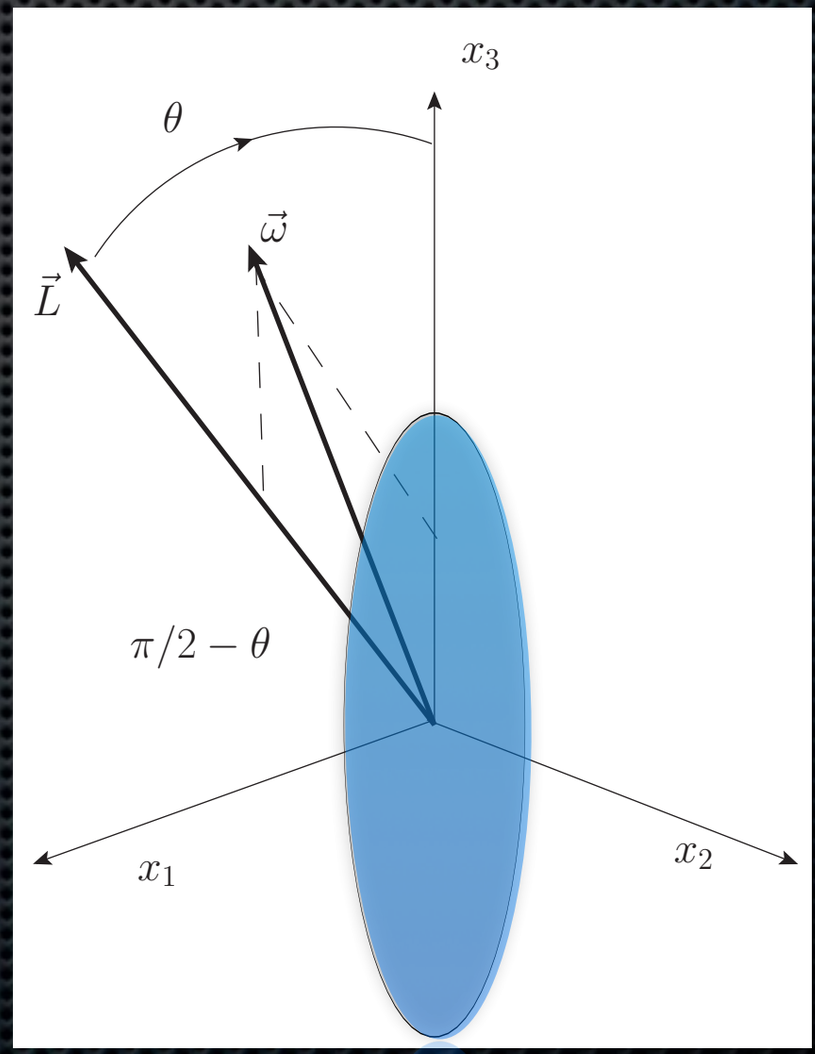
Per tutti i punti dell'asse di simmetria $\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{x}$ è in direzione 2, cioè oltre alla rotazione intorno al proprio asse, la trottola esegue anche una rotazione intorno a **L**. Questa è chiamata "*precessione*". È noto che la Terra ha una forma di sfera schiacciata ai poli e la sua rotazione è quella di una trottola simmetrica intorno all'asse polare, quello che indichiamo con x_3. A questo moto di rotazione, il più evidente, si sovrappone il moto di precessione, in quanto **L** non è perfettamente allineato lungo l'asse polare. Tuttavia il fenomeno della "precessione degli equinozi" è molto più complesso in quanto interviene anche l'azione gravitazionale del Sole e quella dei pianeti.

La velocità di rotazione intorno all'asse 3 è data da $\omega_3 = L_3/I_3 = L \cos\Theta / I_3$ se Θ è l'angolo tra l'asse di simmetria e L. La velocità di precessione si ottiene scomponendo ω lungo L e x_3: si trova

$$\omega_{pr} \sin\Theta = \omega_1 = L_1/I_1 = L \sin\Theta / I_1$$

quindi semplicemente $\omega_{pr} = L/I_1$.

Ciò però vale per un osservatore esterno, mentre rispetto al CR si avrà $\omega_{pr} = L/I_1 - \omega_3$. Se il CR è quasi a simmetria sferica (ad es. nel caso di un pianeta) si ha $\omega_{pr} \approx (I_3/I_1 - 1)\,\omega_3$. Troveremo questo risultato utilizzando le equazioni di Eulero.



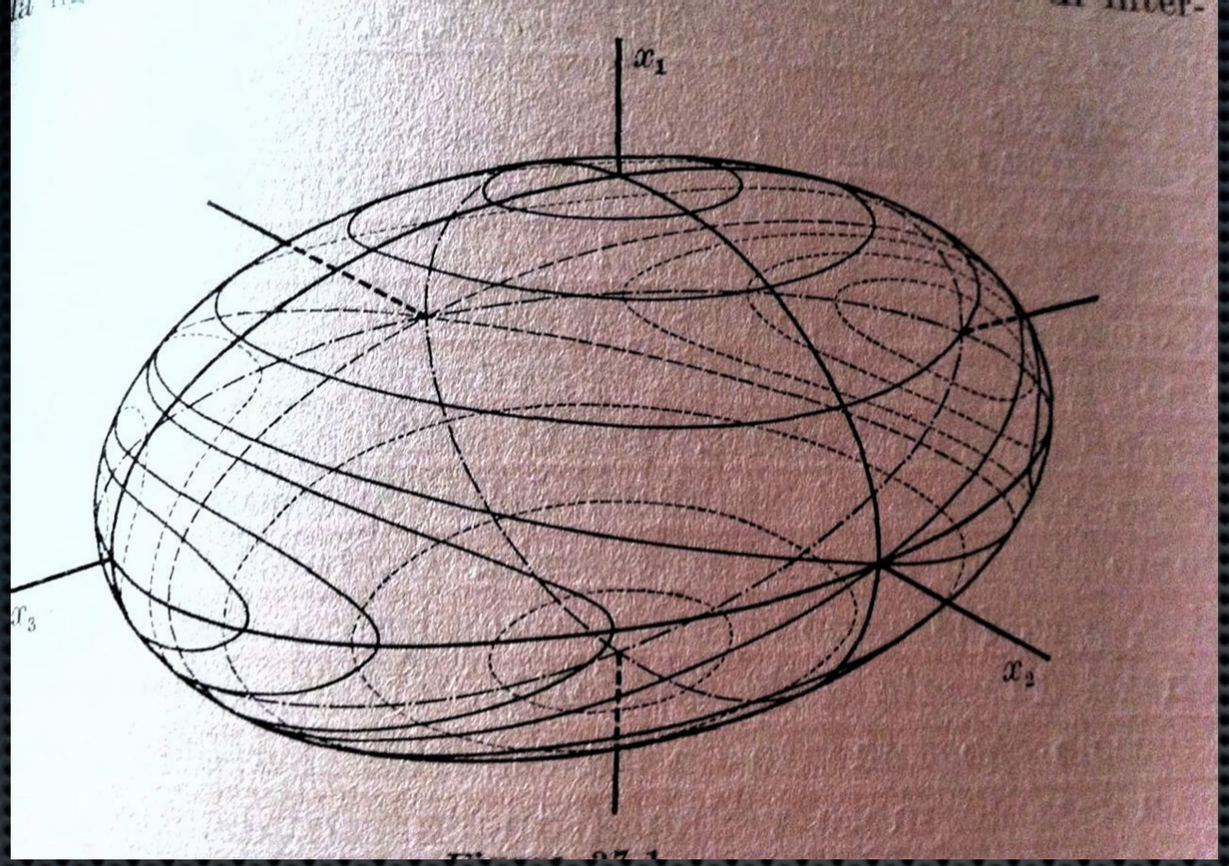
Un'altra considerazione viene dall'esame delle grandezze conservate, *Energia e Momento angolare*. Si ha che

$$2E = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = L_1^2/I_1 + L_2^2/I_2 + L_3^2/I_3$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

Il vettore **L** è fisso rispetto al sistema del laboratorio ma ruota rispetto al sistema di assi solidali con il CR. Le sue componenti devono però rispettare le due equazioni e dunque l'estremità del vettore **L** giace sulla intersezione di due superficie, una sfera di raggio |L| e un ellissoide di assi principali

$$\sqrt{(2E\, I_1)}, \sqrt{(2E\, I_2)}, \sqrt{2E\, I_3)}$$



$I_3 \cong I_2 \cong I_1$

Questo diagramma 3D ci permette di trarre alcune conclusioni immediate. Il moto per cui L è diretto lungo x_3 (o se ne discosta di poco) è stabile, cioè il CR si muove mantenendo l'asse 3 quasi allineato alla direzione fissa di L; stesso vale per l'asse 1. *Al contrario se* ***L*** *è allineato con* x_2*, è sufficiente una piccola perturbazione per fare sí che la l'orientazione del CR venga completamente cambiata.*

Un'altro modo di rendere intuitivo il moto del CR libero (non soggetto a forze esterne) è il seguente.

Il momento angolare **L** è costante, come pure l'energia. Queste grandezze sono legate alla velocità angolare dalle relazioni

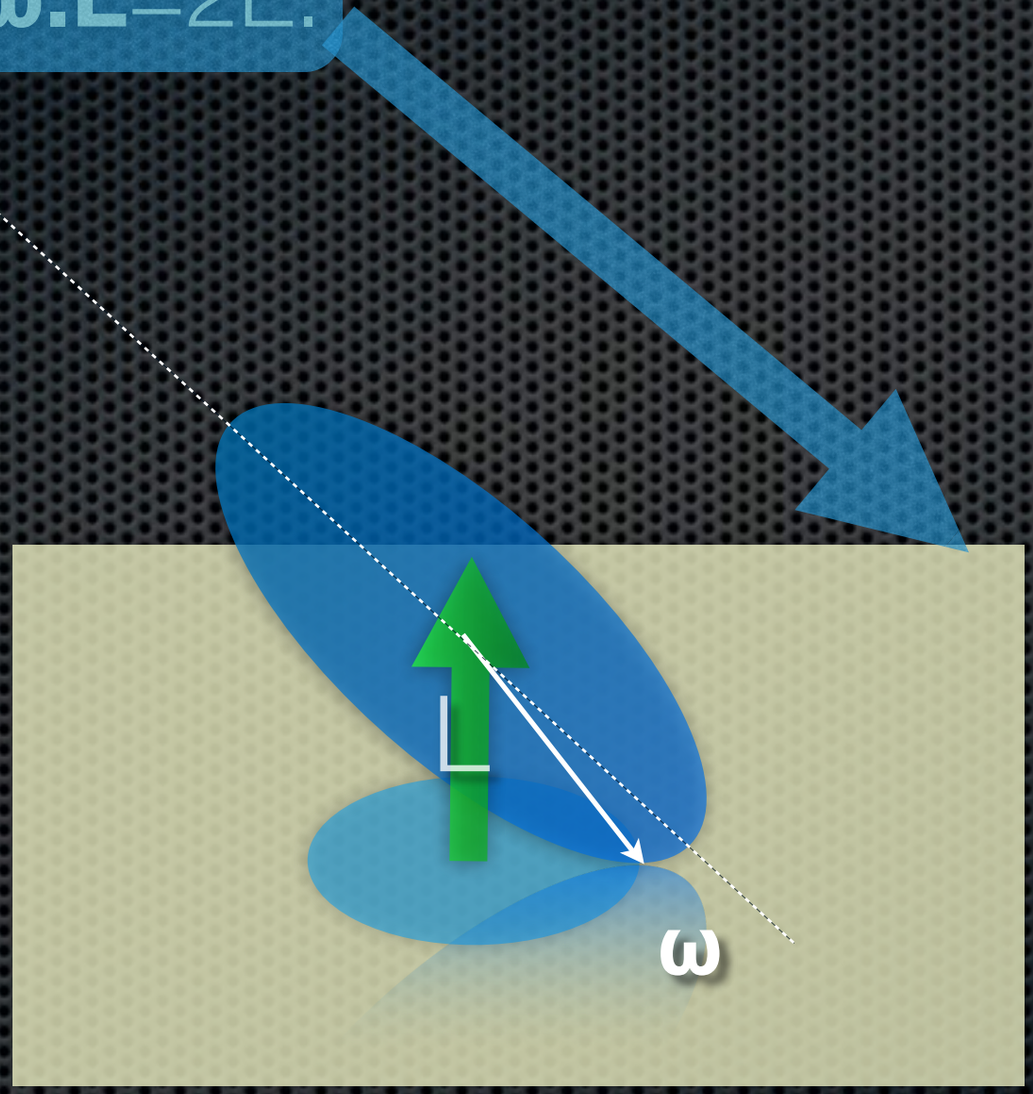
$$E = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \,.\, I\,\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$$

dove si intende che se scegliamo gli assi principli come riferimento si ha semplicemente

$$\boldsymbol{L} = (I_1\,\omega_1,\ I_2\,\omega_2,\ I_3\,\omega_3).$$

Ora la velocità angolare è vincolata a stare sull'ellissoide definito da $\boldsymbol{\omega} \,.\, I\,\boldsymbol{\omega} = 2E$. Se $\boldsymbol{\omega_0}$ soddisfa questa condizione, il piano tangente all'ellissoide è dato dall'equazione $I\,\boldsymbol{\omega_0} \,.\, (\omega - \omega_0) = 0$ ossia

… ossia il CR si muove in modo che l'ellissoide di inerzia si mantenga costantemente tangente al piano fisso **ω.L**=2E.



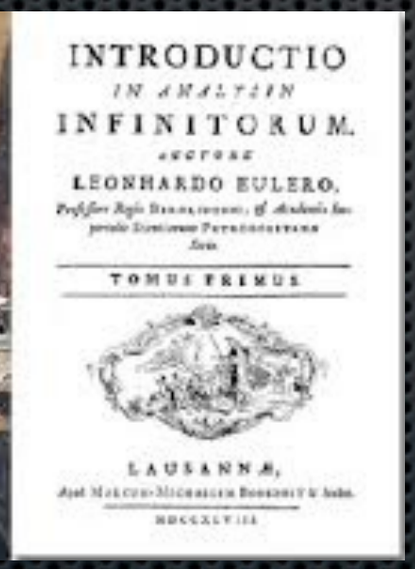
Questa descrizione geometrica rende evidente la presenza della precessione nel moto libero e se il CR è asimmetrico alla precessione si sovrappone un moto di oscillazione ben più complicato. Potete immaginare poi la complessità del quadro quando intervengono forze esterne...

Le equazioni di Eulero

Gli argomenti più o meno intuitivi utilizzati finora per descrivere il moto libero di un CR si possono rendere del tutto rigorosi utilizzando un sistema di equazioni differenziali legate al nome di

Leonard Euler (Basel *1707-St.Petersburg1783*)




INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,

39000 titoli su gallica.bnf.fr

exp(i x)=cos x + i sin x
exp(iπ)=-1
V-E+F=2
Euler-Lagrange



La variazione nel tempo di una grandezza vettoriale d**A**/dt riferita ad assi fissi si può esprimere in termini della variazione riferita agli assi solidali con il CR attraverso la relazione

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{cr} + \vec{\omega} \wedge A$$

Nel caso del momento angolare, per un CR libero da forze esternem dL/dt=0 il che implica che rispetto al sistema solidale con il CR si ha

$$0 = \frac{d\vec{L}_{cr}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_{cr}$$

Traduciamo l'equazione in termini di velocità angolare ricordando come si esprime il prodotto vettoriale in termini delle componenti

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\boldsymbol{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\boldsymbol{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\boldsymbol{k}$$

si trova perciò

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\,\omega_3\,\omega_1 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2 \end{cases}$$

Le equazioni si prestano a una soluzione elementare per il caso della trottola simmetrica (I_1=I_2), infatti ω_3 è costante e le altre due componenti soddisfano la stessa equazione delle funzioni sin e cos

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} = \mu\,\omega_2 \\ \frac{d\omega_2}{dt} = -\mu\,\omega_1 \\ (\mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,\omega_3 = \text{costante}) \end{cases}$$

Dunque il vettore velocità angolare “precede” attorno all’asse di simmetria (x_3) e con esso anche il momento angolare L, infatti dalle equazioni segue immediatamente che $\omega_1^2+\omega_2^2$ = *costante* e lo stesso vale per il momento angolare $L_1^2+L_2^2$ = *costante*.
Dal punto di vista del laboratorio, dal momento che **L** è costante, si conclude che è il CR a precedere intorno alla direzione di **L**, come osservato in precedenza, con velocità di precessione data da $(1 - I_3/I_1)\,\omega_3$, come visto in precedenza (pag.5).

La precessione dell'asse terrestre

La Terra presenta una asimmetria dovuta allo schiacciamento ai poli per cui il rapporto

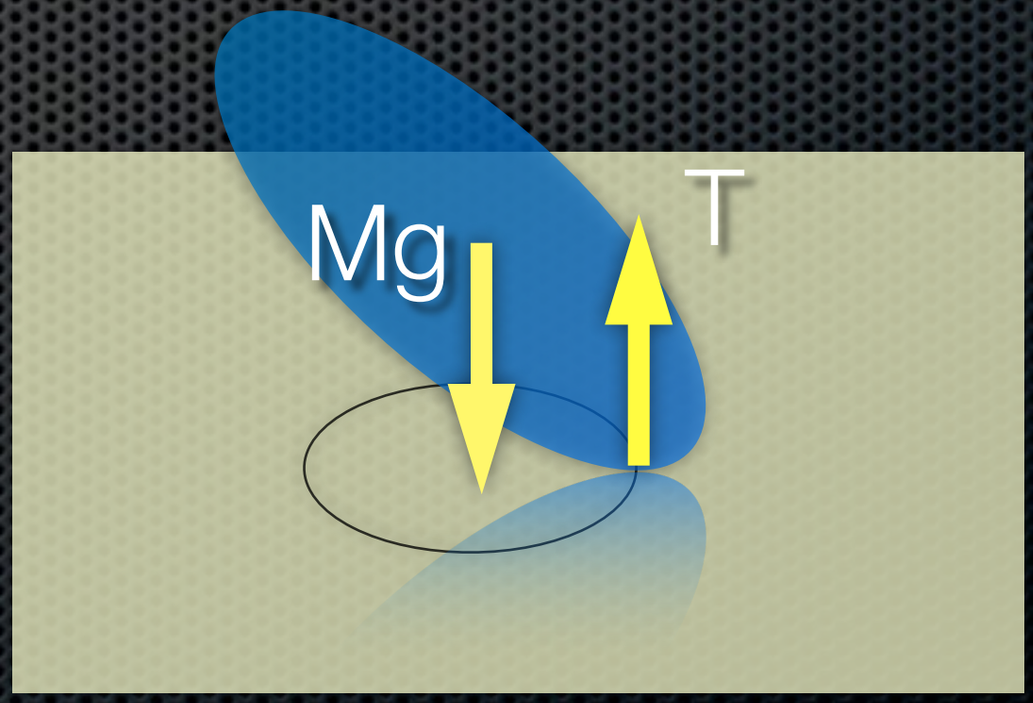
$$(I1 - I3)/I3$$

vale circa -.0033 e quindi l'asse di rotazione descrive una circonferenza attorno al polo in circa 300 giorni secondo questa previsione. In realtà la misura accurata dà un periodo di 427 giorni. Su questa discrepanza incide il fatto che la Terra non è ovviamente un corpo rigido perfetto (presenza dell'atmosfera, degli oceani, del magma sotto la crosta terrestre, etc.). C'e` un altra precessione dovuta all'influenza del Sole e della Luna con periodo di circa 26000 anni ed è quest'ultima ad avere maggiori influenze sulle variazioni climatiche, dicono gli esperti…

Le cose si complicano nel caso in cui il CR sia soggetto a forze esterne. Per una trottola soggetta alla gravità e con un punto di appoggio (diverso dal centro di massa), il momento angolare è soggetto al momento torcente di peso Mg e reazione vincolare. Per simmetria questo è diretto ortogonalmente al piano verticale passante per il punto di appoggio; questo momento torcente tende a far ruotare **L** e nei casi più semplici si tratterà di una precessione intorno alla verticale, ma il caso generale è molto complesso - si veda ...

L.Landau e E. Lifshitz, "*Meccanica*", Boringhieri, 1965

Originale, "*Mehanika*", Mosca Ed. MIR 1958



Seconda parte

Cambiamenti di sistema di riferimento (sistemi *non inerziali*)

21 aprile 2015

Sistemi non-inerziali

Applicazione ai sistemi terrestri

Le leggi di Newton hanno una forma che rimane invariata se si passa da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Per “sistema inerziale” si intende a rigore un riferimento di coordinate che si trovi in uno stato di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema delle stelle fisse. Questo è un concetto semplice da concepire ma difficile da realizzare in pratica. *Ogni riferimento solidale con la Terra è solo approssimativamente inerziale*, per via del moto rotatorio della Terra intorno a sè stessa, per via del moto di rivoluzione intorno al Sole, a causa delle vibrazioni del terreno, etc.

È importante allora determinare quali sono gli effetti dinamici che discendono dall'utilizzare sistemi non inerziali. Consideriamo in generale un sistema di riferimento in cui l'origine delle coordinate O risulti in moto non uniforme rispetto a un sistema inerziale di riferimento. Inoltre ammettiamo che la direzione degli assi possa essere in rotazione. Cominciamo a considerare il caso semplice di una pura traslazione con velocità non-uniforme. Allora si ha $x(t) = X_0(t) + \xi(t)$. La Lagrangiana è modificata come segue

$$L = \tfrac{1}{2}m\,(dX_0(t)/dt + d\xi(t)/dt)^2 - V(X_0(t) + \xi(t))$$

Le equazioni di Lagrange ci danno allora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m(\ddot{X}_0 + \ddot{\xi})$$

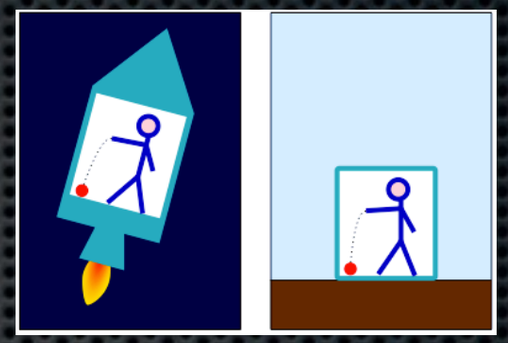
$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -V'(X_0 + \xi)$$

e pertanto

$$m\ddot{\xi} = -m\ddot{X}_0 - V'(X_0 + \xi)$$

L'accelerazione dell'origine del sistema non inerziale compare come una forza che agisce sul punto materiale. Esempi sono molto familiari: un autobus che frena produce sui passeggeri una forza che spinge in avanti e spesso può causare danni alle persone - NON può essere considerata una "forza apparente"! Si noti che questa forza "*inerziale*" è proporzionale alla massa e quindi appare molto simile alla forza di gravità.

Tanto simile che può annullare completamente la gravità (sistema in caduta libera). In un ascensore in caduta libera si ha che l'accelerazione è proprio g e quindi la forza inerziale annulla la forza di gravità all'interno dell'ascensore - o meglio la gravità c'è sempre ma in quel particolare sistema non inerziale il suo effetto è perfettamente assorbito dalla forza inerziale dovuta all'accelerazione dell'ascensore. Einstein ha fondato su questa semplice osservazione il suo "*principio di equivalenza*": *la Fisica in un sistema inerziale soggetto a gravità è equivalente a quella in un opportuno sistema in moto non uniforme e senza campo di gravità.*

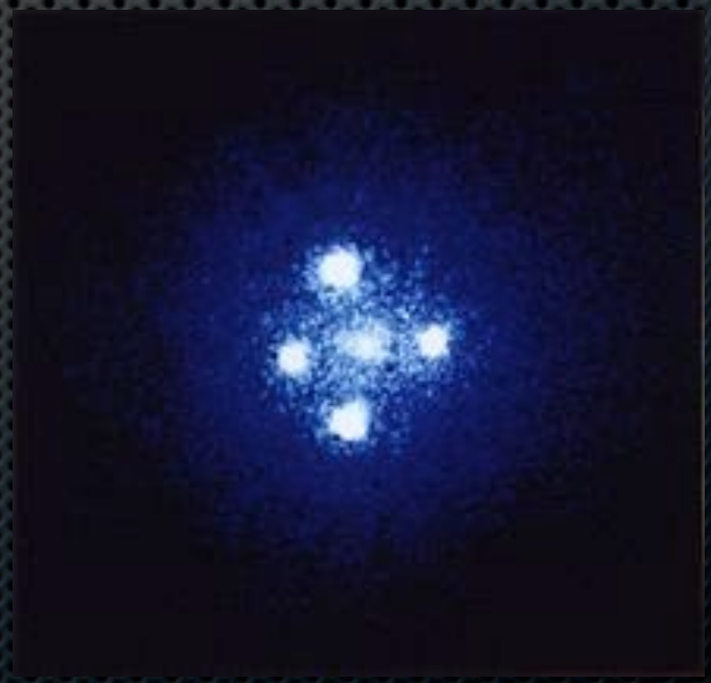


Questo principio ha una conseguenza immediata:

la luce viene deviata dal campo gravitazionale!

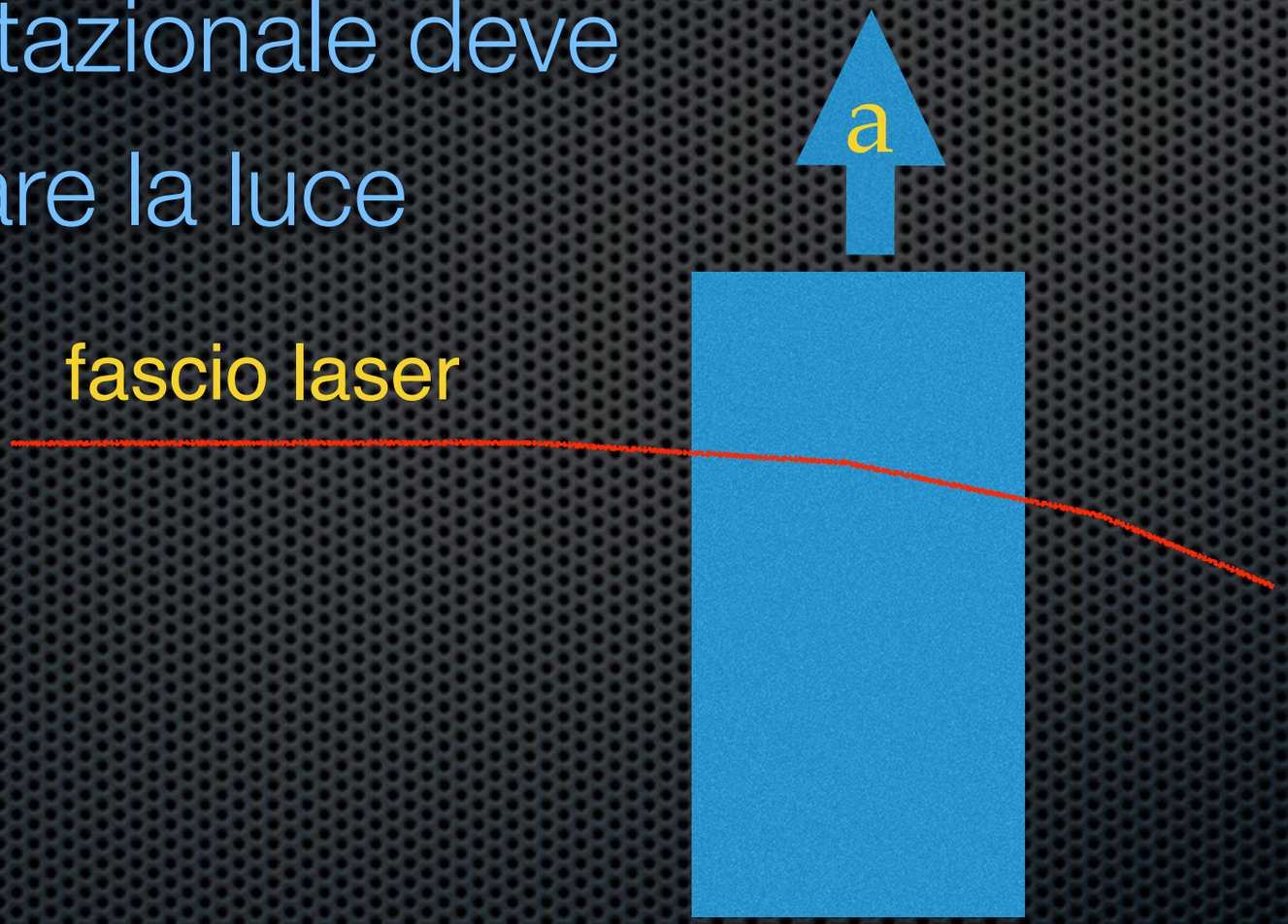
L'esperimento conferma brillantemente la previsione di Einstein:

A. Eddington, eclisse del 1919 - oggi anche fenomeni come il "lensing" gravitazionale.



Un fascio laser che si propaga in linea retta rispetto a un sistema inerziale viene visto incurvato da un osservatore accelerato. Se ne deduce, con Einstein, che anche il campo gravitazionale deve

deviare la luce



Vediamo ora cosa succede in un sistema non-inerziale in cui il riferimento è in rotazione rispetto a un sistema inerziale (ci permetterà di calcolare gli effetti della rotazione terrestre).

Se il sistema è in rotazione e scegliamo che i due riferimenti abbiano la stessa origine delle coordinate, allora queste sono legate dalla relazione

$$x' = R(t)\, x$$

e la velocità è quella rispetto al sistema non-inerziale cui si deve aggiungere quella di rotazione, ossia

$$dx'/dt = R(t)\, dx/dt + dR(t)/dt\, x$$

$$= R(t)(dx/dt + \omega \wedge x)$$

La Lagrangiana è perciò

$$L = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}'}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}') =$$

$$\tfrac{1}{2} m \left(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \wedge \vec{x} \right)^2 - V(R\,\vec{x})$$

Invocando le equazioni di Lagrange si trova

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m(\ddot{x} + \dot{\omega} \wedge x + \omega \wedge \dot{x})$$

Nota

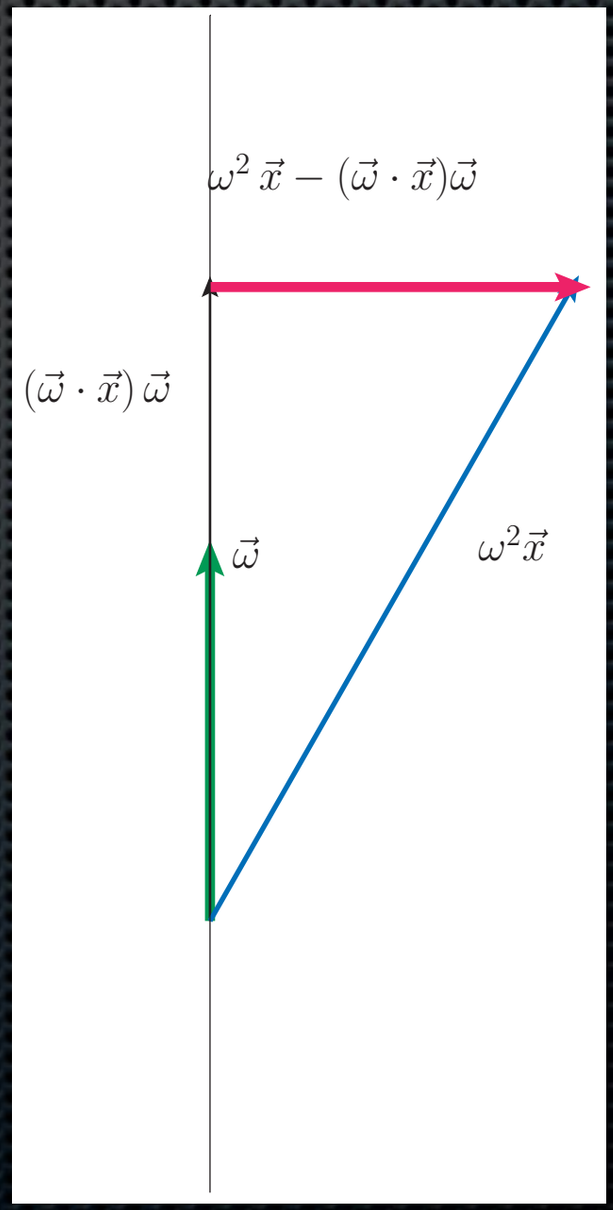
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = m\,\dot{x} \wedge \omega + m\left(\omega^2\, x - (\omega \cdot x)\,\omega\right) - \nabla V$$

e in conclusione si trova

$$m\ddot{x} = -\nabla V - m\dot{\omega} \wedge x - 2m\omega \wedge \dot{x} + m(\omega^2 x - (\omega \cdot x)\omega)$$

I vari termini addizionali sono facilmente identificabili. L'ultimo lo conosciamo già come "forza centrifuga". È proporzionale a ω^2 e quindi trascurabile nel caso della rotazione terrestre.

Tuttavia la forza centrifuga può essere dominante in altri casi. Se siamo su una piattaforma circolare in rotazione e ω non è trascurabile la forza centrifuga è l'effetto più immediatamente evidente e agisce anche sugli oggetti che stanno in quiete rispetto alla piattaforma. L'intensità cresce proporzionalmente alla distanza dal centro di rotazione.



$$m\ddot{x} = -\nabla V - m\dot{\omega} \wedge x - 2m\omega \wedge \dot{x} + m(\omega^2 x - (\omega \cdot x)\omega)$$

forza centrifuga

Il secondo termine dipende dalla non-uniformità del moto rotatorio (accelerazione angolare - nel caso della Terra si può ignorare).

Il terzo è il più interessante. Si chiama "*forza di Coriolis*". Ne studieremo qualche effetto misurabile.

Per valutare l'effetto della forza di Coriolis, consideriamo un grave che cade da un'altezza h in un punto sulla Terra di latitudine λ scriviamo le equazioni di Newton tenendo conto del termine $\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}$ (*la massa scompare in quanto gravità e Coriolis sono entrambe proporzionali alla massa*)

$$a = g + 2\, v \wedge \Omega$$

Benché l'equazione ammetta soluzione esatta, il fatto che Ω è molto piccola ($\approx 7 \times 10^{-5}$) suggerisce di cercare una soluzione approssimata, in modo molto più rapido - questo metodo è molto utile in pratica e consiste nel cercare la soluzione tenendo conto della relativa importanza dei termini che entrano nell'equazione.

Scriviamo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + |\Omega|\mathbf{v}_1$ e ***trascuriamo i termini nell'equazione che contengono*** $|\Omega|^2$***:***

$$dv/dt = dv_0/dt + |\Omega|\, dv_1/dt = g + 2(v_0 + |\Omega| v_1)\wedge\Omega$$

Ebbene si trova $dv_0/dt = g$

$$|\Omega|\, dv_1/dt = 2\, v_0\wedge\Omega$$

mentre trascuriamo il termine $|\Omega| v_1\wedge\Omega$. Ne segue

$$v_0 = g\, t,\ |\Omega|\, v_1 = 2\int v_0\wedge\Omega\, dt = 2\int g\wedge\Omega\, t\, dt = t^2\, g\wedge\Omega$$

e infine integrando ancora

$$x(t) = (0,0,h) + \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + \tfrac{1}{3} t^3\, g\wedge\Omega + O(\Omega^2)$$

La deviazione dovuta alla forza di Coriolis è in questo caso molto piccola. Si può valutare inserendo $t \approx \sqrt{(2h/g)}$ e vale $\Delta x \approx 2\ cm\ \sqrt{(h/100m)^3}\ cos\lambda$ (*l'angolo tra la verticale e ω è complementare alla latitudine* λ)

Se ci troviamo alla latitudine λ, possiamo introdurre un sistema cartesiano locale in modo che l'asse z sia lungo la verticale, la x lungo il parallelo locale e la y lungo il meridiano. Allora

$$a = (0,0,-g) + 2\, v \wedge \Omega =$$

$$(0,0,-g) + 2\,(v_x, v_y, v_z) \wedge (0, -\Omega \cos\lambda, \Omega \sin\lambda)$$

Si trova allora il sistema di equazioni

$$dv_x/dt = 2\Omega\, v_y \sin\lambda + 2\Omega \cos\lambda\, v_z$$
$$dv_y/dt = -2\Omega\, v_x \sin\lambda$$
$$dv_z/dt = -g - 2\Omega\, v_x \cos\lambda$$

Mathematica

$$\text{Sol} = \text{FullSimplify}\Big[\text{DSolve}\Big[\Big\{\frac{\partial v_1(t)}{\partial t} = 2\,\Omega\sin(\lambda)\,v_2(t) + 2\,\Omega\cos(\lambda)\,v_3(t),\ \frac{\partial v_2(t)}{\partial t} = -2\,\Omega\sin(\lambda)\,v_1(t),\ \frac{\partial v_3(t)}{\partial t} = -g - 2\,\Omega\cos(\lambda)\,v_1(t),\ v_1(0) = 0, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0\Big\}, \{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}, t\Big]\Big]$$

$$\Big\{\Big\{v_1(t) \to -\frac{g\cos(\lambda)\sin^2(t\,\Omega)}{\Omega},\ v_2(t) \to -\frac{g\sin(2\,\lambda)\,(\sin(2\,t\,\Omega) - 2\,t\,\Omega)}{4\,\Omega},\ v_3(t) \to -\frac{g\left(2\,t\,\Omega\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda)\sin(2\,t\,\Omega)\right)}{2\,\Omega}\Big\}\Big\}$$

Simplify[Series[$v_1(t)$ /. Sol, {Ω, 0, 2}]]

$$\Big\{-g\,t^2\cos(\lambda)\,\Omega + O\Big(\Omega^3\Big)\Big\}$$

In[26]:=

```
Series[v2[t] /. Sol, {Ω, 0, 2}] // Simplify
```

$$\Big\{\frac{1}{3}\,g\,t^3\sin(2\,\lambda)\,\Omega^2 + O\Big(\Omega^3\Big)\Big\}$$

Simplify[Series[$v_3(t)$ /. Sol, {Ω, 0, 2}]]

$$\Big\{-g\,t + \frac{2}{3}\,g\,t^3\cos^2(\lambda)\,\Omega^2 + O\Big(\Omega^3\Big)\Big\}$$

In[28]:=

```
Series[Integrate[v1[t] /. Sol, t], {Ω, 0, 2}]
```

$$\Big\{-\frac{1}{3}\left(g\,t^3\cos(\lambda)\right)\Omega + O\Big(\Omega^3\Big)\Big\}$$

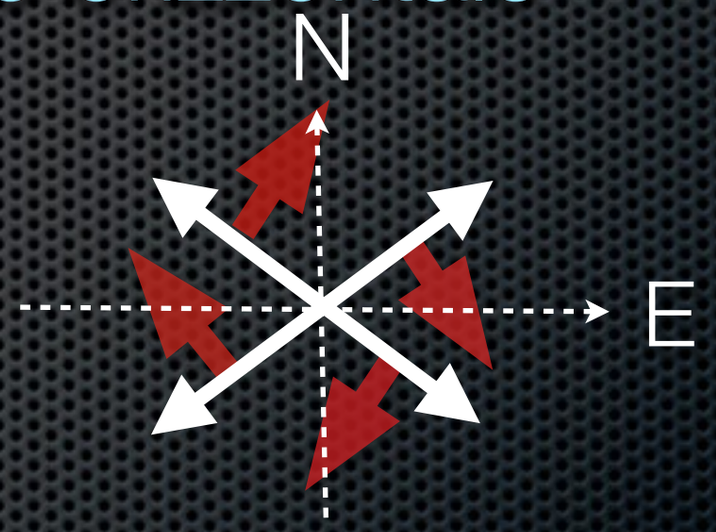
Un effetto della forza di Coriolis che si osserva a livello geologico è costituito dalla conformazione che assumono le rive dei fiumi *(nota come legge di Baer)*: nell'emisfero boreale la riva destra dei fiumi tende a essere maggiormente erosa, quella sinistra nell'emisfero australe (anche Einstein scrisse sul fenomeno). L'effetto è molto piccolo e può essere interpretato in termini di forza di Coriolis!

Vortici nel lavandino

si è a lungo speculato sul fatto che i vortici che si formano nello scarico di un lavandino fossero causati dalla forza di Coriolis! Su Wikipedia trovate informazioni dettagliate. Il fenomeno è invece molto più complesso e per verificare un effetto del genere ci sarebbe da sciupare molta acqua…….. Non ve lo consiglio!

Orientiamo gli assi in modo che la y punti verso nord, la x verso oriente e la z sia la verticale. La velocità di rotazione terrestre in questo riferimento è data da $\boldsymbol{\Omega}=(0,\ |\Omega|\cos\lambda,\ |\Omega|\sin\lambda)$ e la accelerazione di Coriolis nel piano orizzontale sarà pertanto

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\Omega} = 2\ |\Omega|\ \sin\lambda\ (v_2, -v_1)$$

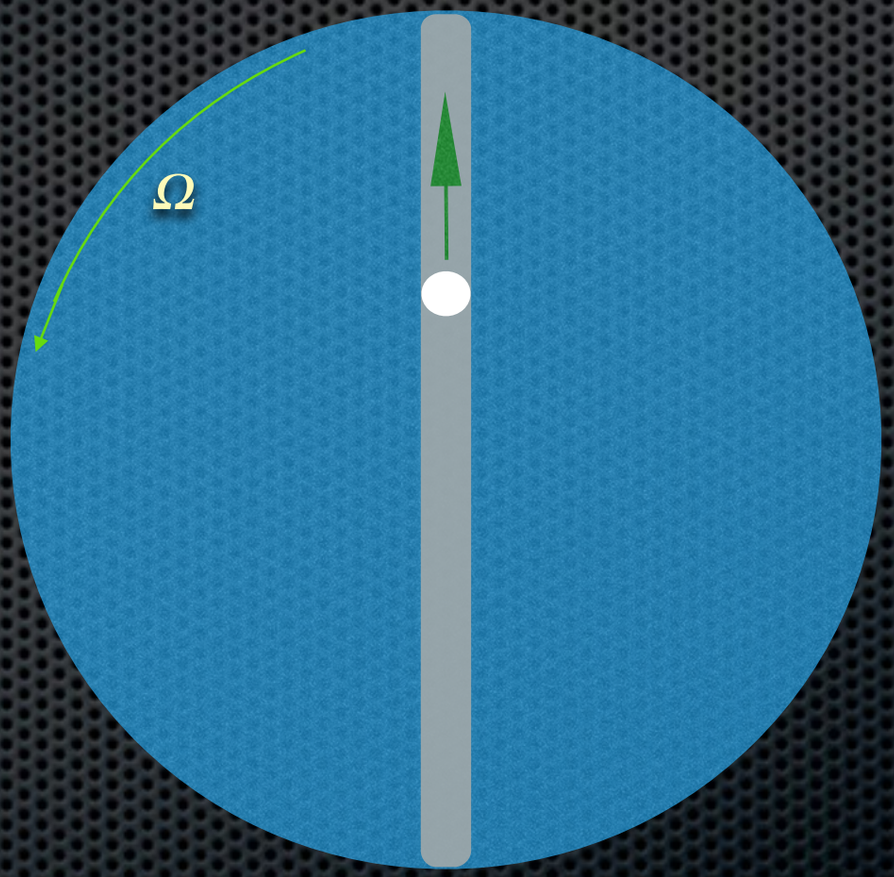


(+,+)⇒(+,-), (-,+) ⇒ (+,+)

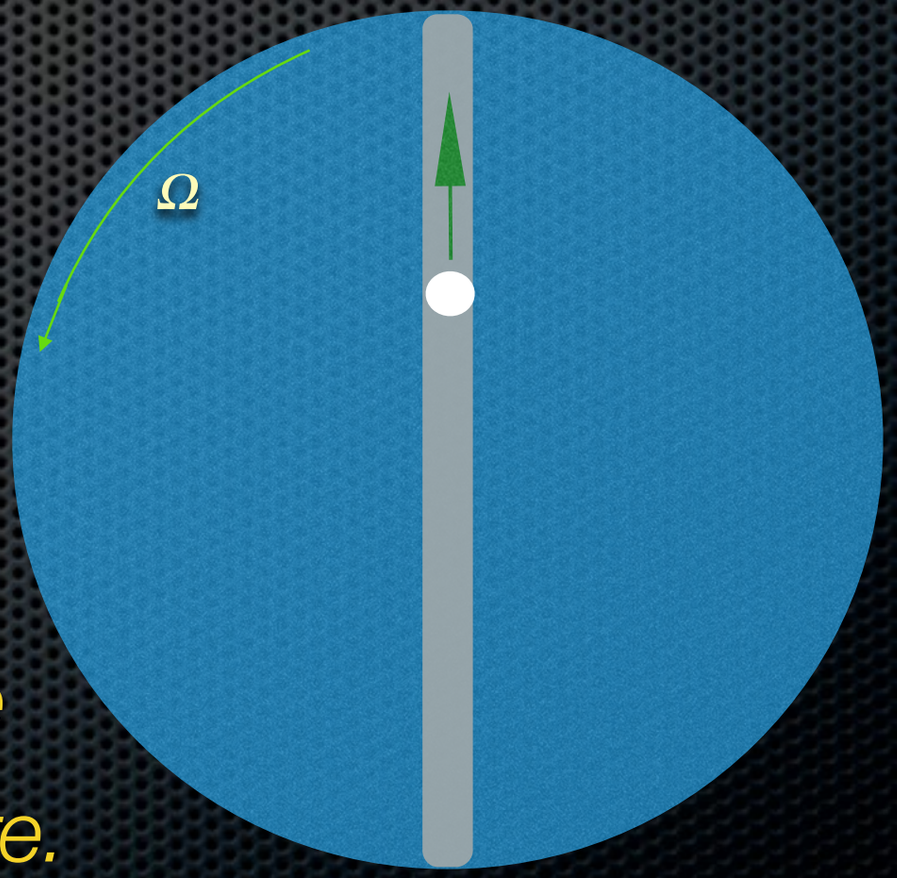
(-,-)⇒(-,+), (+,-)⇒(-,-)

Per λ>0 (boreale) l'accelerazione, ortogonale a v, punta alla sua destra, l'opposto se λ<0. La corrente,qualunque sia la direzione, sente quindi una forza che la spinge verso la riva destra alle nostre latitudini.

Un esperimento che possiamo effettuare con mezzi limitati è quello della piattaforma rotante. Prendiamo una tavola rigida circolare e mettiamola in moto rotatorio con velocità angolare Ω. Sulla piattaforma è presente una scanalatura in cui possiamo far muovere una sferetta rigida.



Cosa succede? Per seguire il moto rotatorio la sferetta avrebbe bisogno di una forza che la tenesse sulla traiettoria circolare; in mancanza di questa la sfera viene accelerata verso l'esterno, acquista velocità fino a uscire dalla piattaforma. La scanalatura esercita una forza di reazione vincolare sulla sfera diretta verso sinistra. Questa è la descrizione del fenomeno dal punto di vista di chi osserva dall'esterno. *Un osservatore posto sulla piattaforma descrive la cosa dal suo punto di vista così: c'è una forza centrifuga che accelera la sfera verso l'esterno tanto più forte quanto più la sfera si allontana dal centro della piattaforma. Questa forza è perfettamente percepibile all'osservatore.*



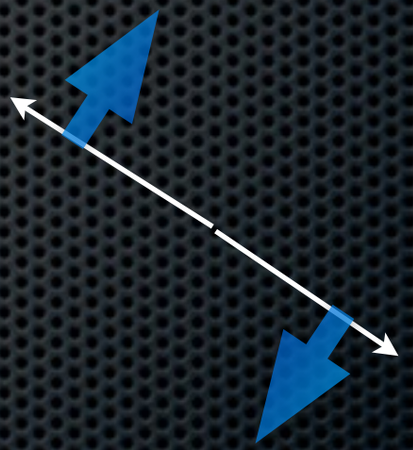
E lo sforzo del vincolo verso sinistra, che si può mettere in evidenza volendo con dei sensori collocati sulla scanalatura, *a cosa è dovuto*?

Questo sforzo esiste solo quando la sfera è in movimento, *infatti non c'e` se tratteniamo la sfera con una funicella,* inoltre aumenta con la velocità della sfera e con la velocità angolare.

Ecco scoperta la forza di Coriolis, trasversale al movimento

$$2\, v\, \boldsymbol{\Omega}$$

Un altro effetto facilmente osservabile è costituito dalla rotazione del piano di oscillazione di un pendolo (effetto noto come "*Pendolo di Foucault*"). La trattazione analitica è semplice, ma guardando al diagramma precedente risulta evidente che *il piano di oscillazione del pendolo deve subire una rotazione sistematica in senso orario per via della accelerazione di Coriolis* (nel nostro emisfero).



Le equazioni del moto si ricavano immediatamente riferendolo allo spostamento orizzontale x-y nel caso di piccole oscillazioni. Al termine usuale che porta a oscillazioni con frequenza $\omega_0^2=g/L$ si deve aggiungere l'accelerazione di Coriolis come calcolata a pag.28

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\, x + 2\Omega \sin\lambda\, \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2\, y - 2\Omega \sin\lambda\, \dot{x}$$

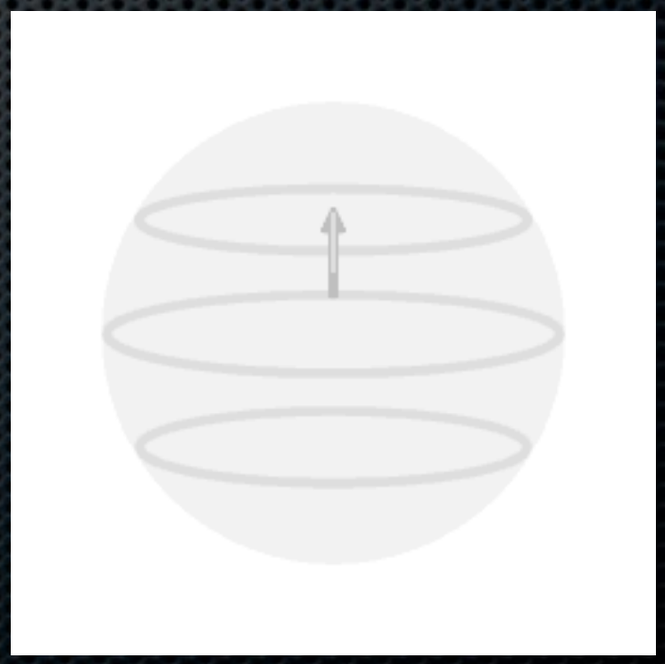
Introduciamo la variabile complessa w=x+iy. Con questo trucco il sistema di due equazioni si riduce a una sola!

$$\ddot{w} = -\omega_0^2\, w - 2i\Omega \sin\lambda\, \dot{w}$$

che ha come soluzione $w = A \exp\{i\omega t\}$

Il caso più semplice è quello del moto del pendolo al polo Nord. È evidente che il piano di oscillazione è fisso rispetto al sistema delle stelle fisse, mentre ruota esattamente di 360^0 ogni giorno perché è la Terra a “ruotargli sotto”. Ad una latitudine qualunque λ l’effetto sussiste ed è proporzionale a $\sin \lambda$.

Sostituendo nell'equazione si ottiene $\omega^2 = \omega_0^2 - 2(\Omega \sin\lambda)\,\omega$ e quindi $\omega = \pm\omega_0 - \Omega \sin\lambda$ avendo trascurato termini dell'ordine di Ω^2. La soluzione è perciò la seguente $x + iy = e^{-i\Omega t(\sin\lambda)} \left(A\, e^{i\omega_0 t} + B\, e^{-i\omega_0 t}\right)$ che mostra come alle oscillazioni "normali", in assenza dell'effetto della forza di Coriolis, si aggiunga una rotazione con velocità angolare $\Omega \sin\lambda$ in direzione oraria se $\lambda>0$. L'animazione (Wikipedia) presenta il caso $\lambda = 30^0$ che corrisponde a un giro completo in due giorni:



Prossima lezione giovedì

23 aprile ore 10:30

(Esercizi)