Università degli Studi di Parma

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Informatica e delle Telecomunicazioni

anno accademico 2015-2015

Fisica 1



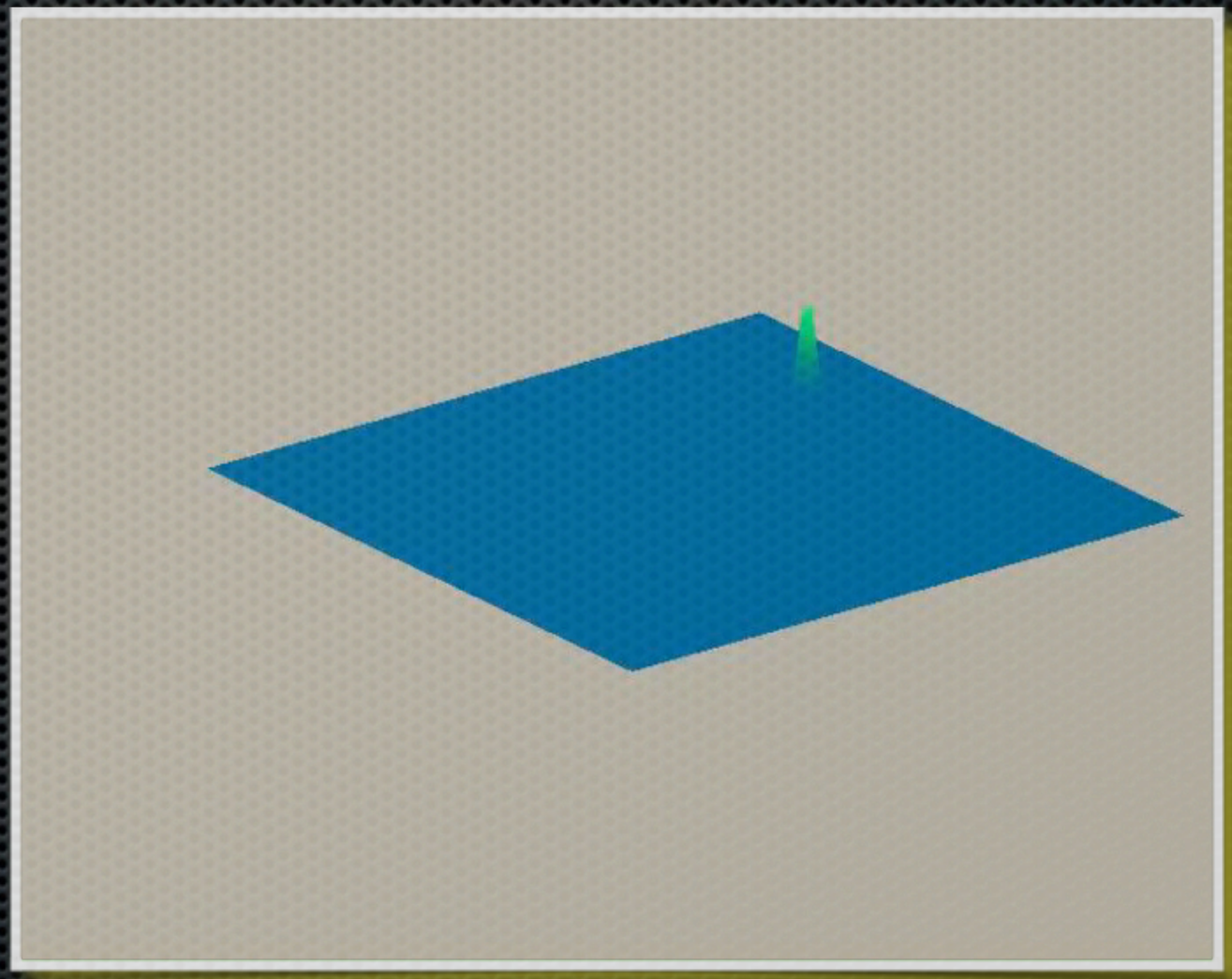
Prof. Enrico Onofri,
titolare del corso

Prof. Emilia Liviotti,
esercitazioni

11-12 maggio 2015

Onde elastiche

Riprendiamo un argomento che abbiamo appena sfiorato nella Lez.7. Quello cui state assistendo è una simulazione di una propagazione ondosa sulla superficie di un liquido delimitata da una forma “a L”. La simulazione è abbastanza realistica, eppure è ottenuta con un programma estremamente semplice.



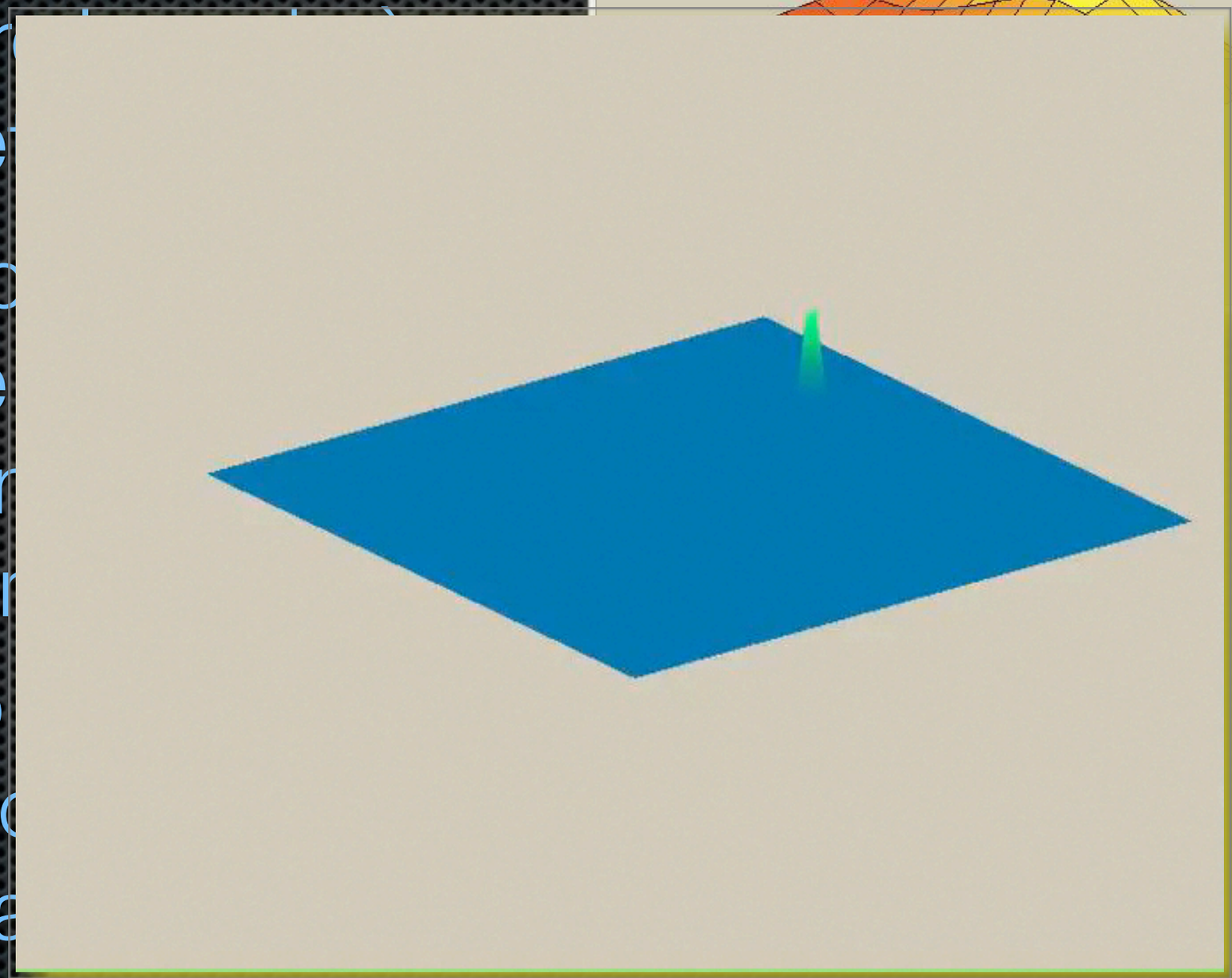
Il concetto di onda entra in una molteplicità di fenomeni di Fisica:

1. Meccanica (*onde elastiche, onde sonore*),
2. Fluidi (*onde superficiali in un liquido*),
3. Elettromagnetismo (*onde e.m. e quindi onde radio, X, luce visibile, γ, infrarosso, ultravioletto*),
4. gravitazione (Einstein)
5. fisica quantistica (dualità onda-corpuscolo).

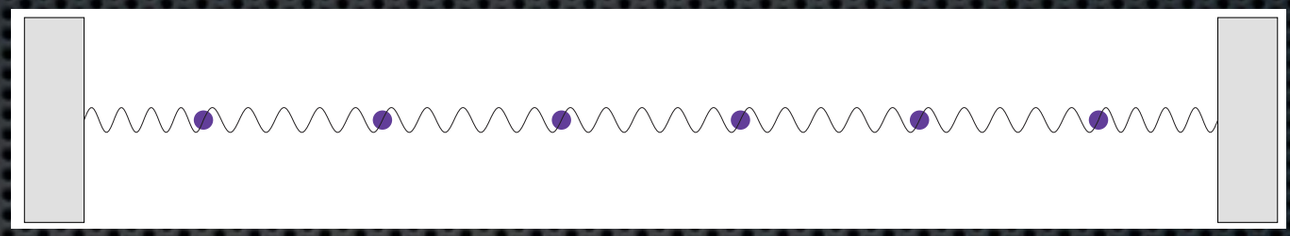
Insomma difficile proseguire lo studio della Fisica senza apprendere i rudimenti della descrizione matematica delle onde.

Il modello più semplice in cui si possono studiar
quello del tappe

In questo filmato
quella che viene
un’”onda stazion
un’onda che nor
mentre nell’altro
di fronte a un mo
che si propaga a
spazio disponibile.



La descrizione matematica delle onde elastiche si può impostare nel caso di una semplice catena formata da masse uguali legate tra loro da molle elastiche



Scriviamo la funzione Lagrangiana della catena:

$$L = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 - \frac{k}{2}\sum_j (x_{j+1} - x_j)^2$$

Si intende che le x indicano la *deviazione dalla posizione di equilibrio delle masse*, m è la massa, k il modulo di elasticità delle molle

L’equazione di (Euler-)Lagrange ci dà

$$m\ddot{x}_j = k(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1})$$

che è facilmente traducibile in un codice *matlab* (tutti i filmati sono ottenuti a partire da queste equazioni. Tuttavia l’approccio numerico non ci permette di penetrare al cuore del fenomeno ondoso. Meglio sviluppare anche la trattazione analitica.

Immaginiamo che le masse siano in grande numero - 10^{23} come in un mezzo continuo realistico, un cavo elastico ad esempio. Allora noi possiamo rappresentare lo stato del cavo attraverso una funzione di variabile continua $y = j/N\ L$, L = lunghezza del cavo = $N\ a$, a = distanza tra i punti di equilibrio.
È chiaro allora che *le differenze finite si possono esprimere come derivate rispetto alla variabile continua y.*

Riscriviamo tutto in termini della variabile continua *y:*

$$x_j = x(y,t), y = ja$$

$$x_{j+1} = x(y+a,t)$$

Ne segue

$$m\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial^2 t} = k\left(x(y+a,t) - 2x(y,t) + x(y-a,t)\right)$$

A questo punto teniamo conto del fatto che *a* è molto piccola e approssimiamo perciò

$$x(y+a,t) \approx x(y,t) + a\frac{\partial x(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial^2 y}$$

$$x(y-a,t) \approx x(y,t) - a\frac{\partial x(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial^2 y}$$

Sostituendo nell'equazione si trova infine...

Signori...l'Equazione d'Onda

$$m\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial t^2} = ka^2\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial^2 y}$$

che si riscrive in termini di un'unico parametro

$ka^2/m = v^2$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial^2 y}$$

v ha le dimensioni di una velocità:

$$[v^2] = [k\, a^2/m] = [E]/L^2 \times L^2\,/M = L^2/T^2$$

e rappresenta la velocità di propagazione delle onde. *Infatti se all'istante t=0 si ha x(y,0)=0 tranne che in un intervallo |y|<b, allora la soluzione soddisfa x(y,t)=0 per |y|>b + v t*

e cioè gli effetti di una perturbazione localizzata si sentono a distanza D solo dopo un tempo D/v (riguardare il filmato a pag. 4!).

La soluzione generale dell'equazione d'onda:

$$x(y,t) = F(y-v\,t) + G(y+v\,t)$$

Se interpretiamo la x(y,t) come la posizione di una corda elastica sottoposta a una certa tensione (come la corda di violino) e deformiamo la corda “pizzicandola”, allora

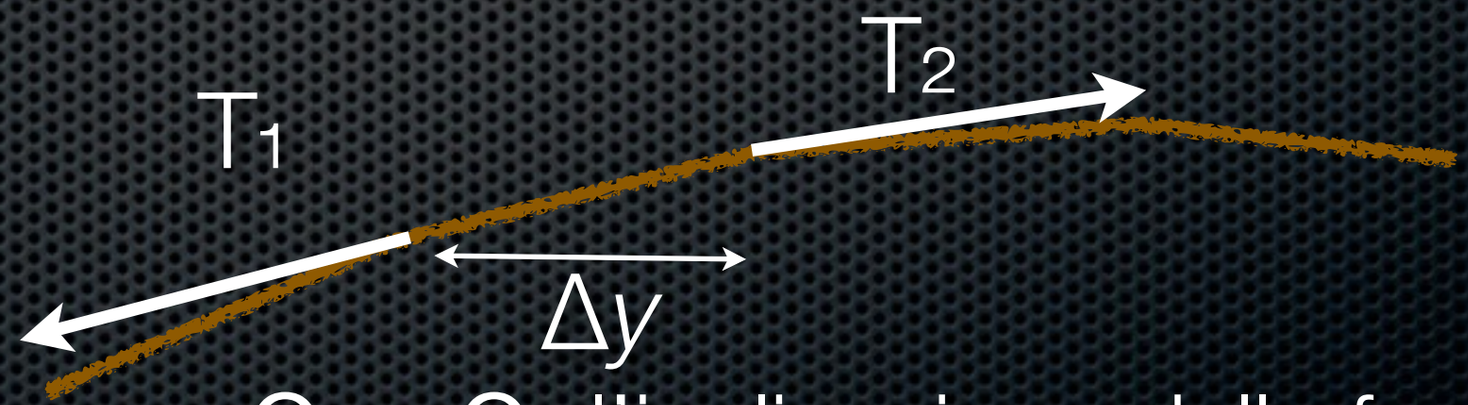
$$x(y,0) = f(y),\ \left.\frac{\partial x(y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

ne segue

$$x(y,t) = \tfrac{1}{2}(f(y-vt) + f(y+vt))$$

il che significa che la forma iniziale della corda elastica si propaga verso destra e verso sinistra. Questo è vero SOLO per mezzi elastici in UNA DIMENSIONE

Vediamo ora più da vicino come si raggiunge l'equazione d'onda dalle equazioni di Newton. Consideriamo una fune elastica di densità lineare μ (cioè un pezzo di fune lungo Δy è dotato di una massa $\mu \Delta y$. la tensione della fune sia T, da considerare costante lungo la fune, in quanto se cosí non fosse la fune reagirebbe grazie alla sua elasticità fino a equalizzare la tensione. Se spostiamo la fune dalla posizione di equilibrio, la tensione agisce come forza di richiamo

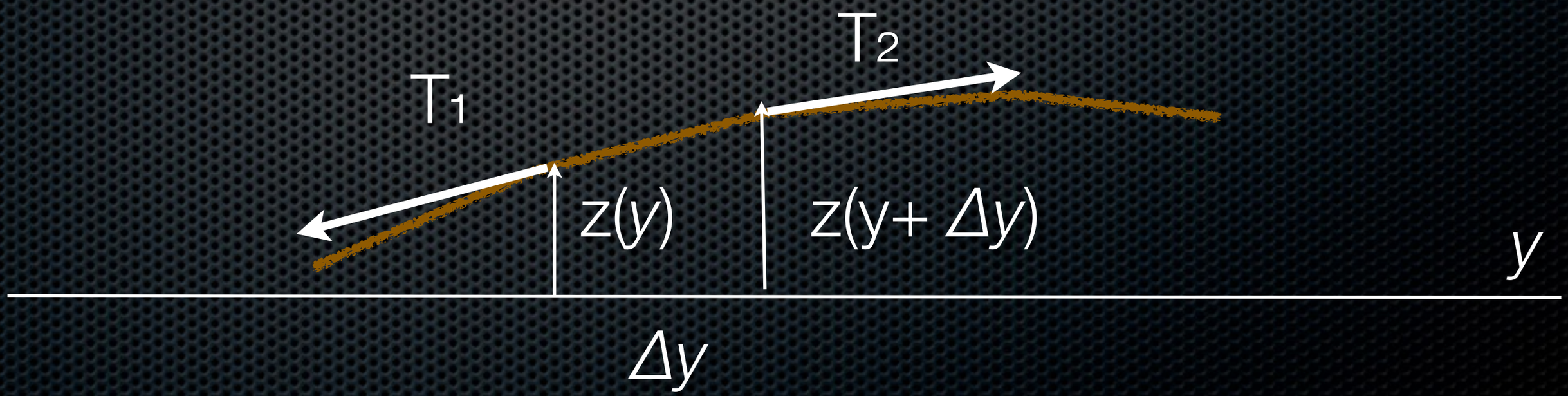


Indichiamo con Θ_1 e Θ_2 l'inclinazione della fune nei punti separati dalla distanza Δy.

Sul frammento di fune agisce allora in direzione verticale una forza $T \sin\Theta_2 - T \sin \Theta_1$ che per angoli molto piccoli (*quant'è l'angolo di deflessione di una corda di chitarra pizzicata in un punto?*) si può confondere con

$$T \tan\Theta_2 - T \tan \Theta_1$$

ma tanΘ coincide in ogni punto con la derivata della posizione verticale z(y,t) rispetto a *y*



La forza che agisce sulla massa μ Δy è pertanto

$$T\,\partial z(y+\Delta y,t)/\partial y - T\,\partial z(y,t)/\partial y \approx T\,\partial^2 z(y,t)/\partial y^2\,\Delta y$$

e questa è da porre uguale all'accelerazione del frammento di fune:

$$T\,\partial^2 z(y,t)/\partial y^2\,\Delta y = \mu\,\Delta y\,\partial^2 z(y,t)/\partial t^2$$

ossia ancora

$$\partial^2 z(y,t)/\partial y^2 = 1/v^2\,\partial^2 z(y,t)/\partial t^2$$

dove $v^2 = T/\mu$.

Abbiamo perciò anche un'espressione esplicita della velocità delle onde che si propagano lungo la fune in funzione della tensione e della densità lineare.

Per fissare le idee, per un corda con $\mu = 10g/m$ e $T=10N$ si ha per esempio $v \approx 32m/s$, un decimo della velocità del suono (343m/s). Per un cavo con $\mu = 1\ kg/m$ e $T=10^4\ N$ si avrà $v \approx 100m/s$.

Un'onda trasporta energia? A giudicare dalle onde sulla superficie di un liquido la risposta è sí. Anche se non c'è spostamento di materia le oscillazioni comportano un trasporto di energia come mostrano gli effetti talvolta devastanti di un onda che si abbatte su di un molo. Ancora più importante: *le onde trasportano informazione, e per una parte di voi questo sarà un tema centrale della vostra formazione.*

Consideriamo la porzione di cavo come in precedenza.
È chiaro che possiamo attribuirle una densità di energia:

$$\tfrac{1}{2}\,\Delta y\,\mu\,(\partial z/\partial t)^2 \quad \textit{(* energia cinetica *)}$$

$$+$$

$$\tfrac{1}{2}\,\Delta y\,T\,(\partial z/\partial y)^2 \quad \textit{(* energia potenziale *)}$$

e l'energia totale del cavo sarà

$$\int \tfrac{1}{2}\left(\mu\,(\partial z/\partial t)^2 + T\,(\partial z/\partial y)^2\right) dy$$

La sua derivata rispetto al tempo risulta uguale a

$$\int(\mu\,(\partial z/\partial t)\,(\partial^2 z/\partial t^2)+T\,(\partial z/\partial y)\,(\partial^2 z/\partial y \partial t))\,dy$$

Se utilizziamo l'equazione d'onda per trasformare il primo termine troviamo

$$T\int_a^b \left(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t}\right)dy = T\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t}\right)dy$$

Ma ora possiamo integrare e ottenere come risultato finale la differenza tra gli estremi della corda della quantità $T\,\partial z/\partial y\,\partial z/\partial t$

$$\frac{dE}{dt} = T\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_b - T\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_a$$

La grandezza $S = -T\,\partial z/\partial y\,\partial z/\partial t$ rappresenta il *flusso di energia trasportato dall'onda*! La densità di energia $\mathcal{E}(y,t) = \frac{1}{2}\,(\mu\,(\partial z/\partial t)^2 + T\,(\partial z/\partial y)^2)$

soddisfa con S l'equazione

$$\partial\mathcal{E}(y,t)/\partial t + \partial S/\partial y = 0$$

Incontrerete ancora equazioni di questo tipo con la denominazione "equazione di continuità" (in elettromagnetismo, diffusione del calore, fluidodinamica).

$$\frac{d}{dt}E_{ab} = \int_a^b dy \frac{\partial E(y,t)}{\partial t}$$

$$= -\int_a^b dy\,\frac{\partial S}{\partial y} = S(a) - S(b)$$

Ad esempio per un'onda progressiva $z=f(y-vt)$ il flusso di energia sarà

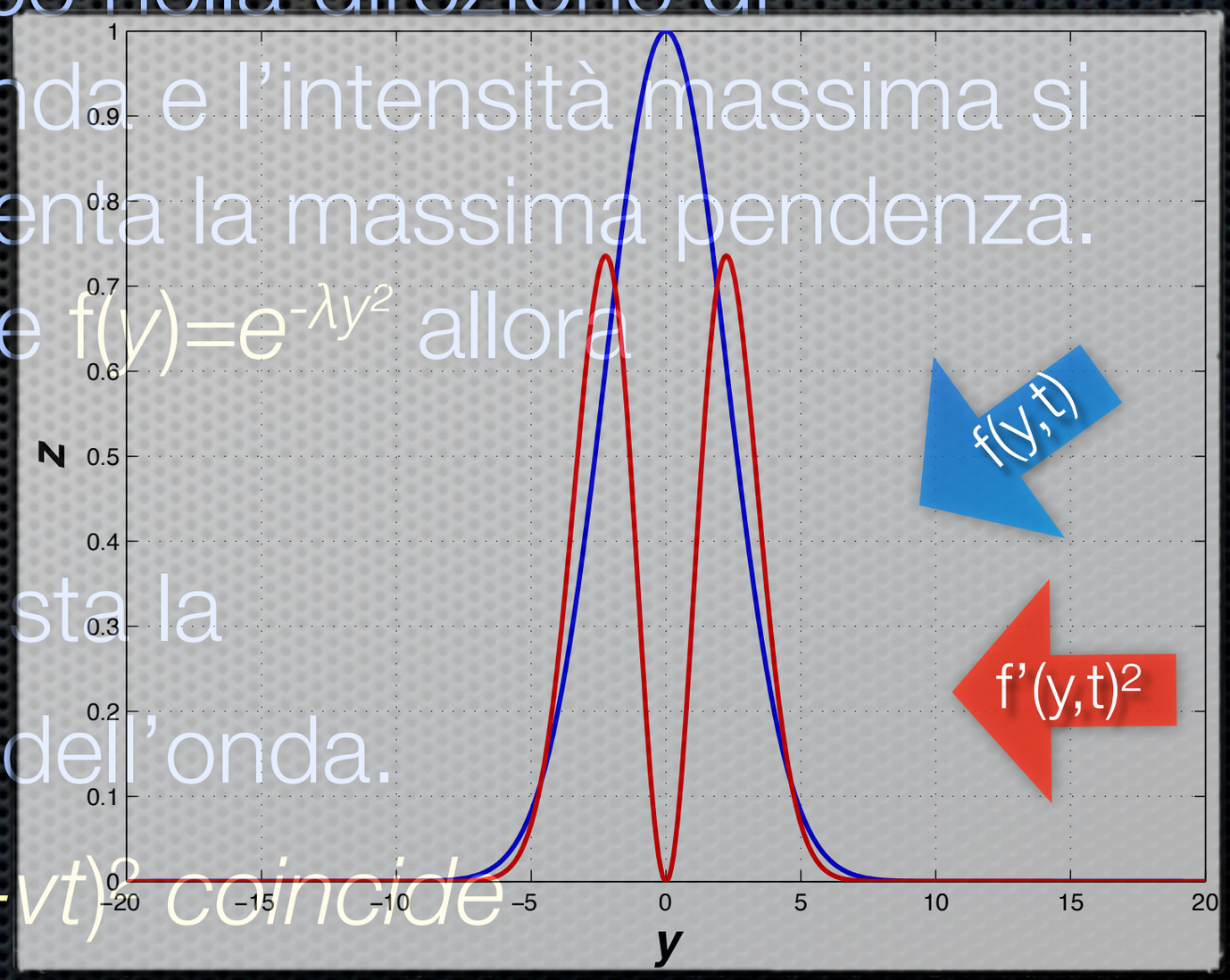
$$S = -T\, f'(y-vt)\,(-v) f'(y-vt) = T\, v\, |f'(y-vt)|^2$$

quindi l'energia fluisce nella direzione di propagazione dell'onda e l'intensità massima si ha dove l'onda presenta la massima pendenza.

Per fissare le idee, se $f(y)=e^{-\lambda y^2}$ allora

$$S = 4\, T\, v\, \lambda^2\, y^2\, e^{-\lambda y^2}$$

e si concentra dove sta la massima pendenza dell'onda.



Notiamo che $T\ f'(y-vt)^2$ *coincide con la densità di energia* $E(y,t)$. Dunque $S=v\,E(y,t)$

Ma questa proprietà

$$S \propto v\, \mathcal{E}$$

non vale in generale. Provare a calcolare S e densità di energia per

$$z(x,t) = f(x-vt)+f(x+vt)$$

Talvolta anche i libri di testo sbagliano, e anche i prof...

Per curiosità osserviamo che per le onde elettromagnetiche il flusso di energia è dato dal cosiddetto “vettore di Poynting”, definito da

$$S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

che ha una forma simile, in quanto E e B (campi elettrico e magnetico) sono dati dalle derivate rispetto al tempo e rispetto alle coordinate spaziali del cosiddetto “potenziale elettromagnetico” *A(x,t). Quindi l’espressione che abbiamo trovato per S nel caso delle onde elastiche aiuta ad orientarsi anche nello studio dell’elettromagnetismo.*

Siamo partiti dalla semplice equazione

$$m\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial^2 t} = k\left(x(y+a,t) - 2x(y,t) + x(y-a,t)\right)$$

che vale per un mezzo elastico con una sola dimensione spaziale. In tre dimensioni le cose non cambiano di molto, ad eccezione del fatto che non è cosí facile risolvere l'equazione d'onda. L'equazione dovrà tenere conto che adesso ci sono due punti vicini collegati da molle elastiche per ognuna delle dimensioni, quindi si trova

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial t^2} = k(&x(y+ae_1,t) - 2x(y,t) + x(y-ae_1,t) \\ &+ x(y+ae_2,t) - 2x(y,t) + x(y-ae_2,t) \\ &+ x(y+ae_3,t) - 2x(y,t) + x(y-ae_3,t)) \end{aligned}$$

Nello stesso limite a→0 considerato prima otteniamo allora l'equazione d'onda in 3-dim:

$$m\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial t^2} = ka^2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_3^2}\right)$$

Indicando $ka^2/m=v^2$ e *chiamando* $x\rightarrow\boldsymbol{\varphi}$ per non confonderlo con le coordinate, e infine $y\rightarrow x$ (!) otteniamo l'equazione delle onde nella sua forma standard

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

Non esiste una soluzione generale esplicita come nel caso in una sola dimensione. Tuttavia esistono metodi di soluzione molto efficienti, per cui avendo un calcolatore a disposizione "il problema non esiste"...

La combinazione di derivate che compare nell'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y,z)}{\partial z^2} \equiv \Delta\phi(x,y,z)$$

è noto come "il Laplaciano" di ϕ, in onore di *Pierre Simon de Laplace,* e compare in molte equazioni della fisica matematica. Ad es. il potenziale gravitazionale generato da una densità di massa ρ(x,y,z) è ottenibile quale soluzione dell'equazione (di Poisson)

$$\Delta\phi(x,y,z) = -4\pi\,\rho(x,y,z)$$

Come nel caso precedente in 1 dimensione, l'Energia del sistema elastico si esprime così in termini della deformazione ϕ

$$E(\varphi) = \int \left\{ \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \tau \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right\} d^3x$$

e il flusso di energia trasportato dalle onde è calcolabile a partire da

$$S_i[\varphi] = -\tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Se indichiamo con $E(\varphi)$ la densità di energia (energia per unità di volume) allora si ha

$$\frac{\partial E[\varphi]}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S_i[\varphi]}{\partial x_i} = 0$$

(o, simbolicamente)

$$\frac{\partial E[\varphi]}{\partial t} + \mathrm{div} \vec{S}[\varphi] = 0$$

L'equazione d'onda è *lineare* il che significa che è possibile analizzare ogni soluzione in termini di soluzioni elementari di cui la soluzione è combinazione lineare. Le soluzioni più semplici con cui si costruiscono tutte le soluzioni sono le "onde piane": sono della forma

$$\phi(x,t) = A\,\exp\left(i\,k\,x - i\omega\,t\right)$$

Inserendo nell'equazione questa forma d'onda troviamo

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\,\phi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2\,\phi(x,t)$$

da cui $\omega^2/v^2 = k^2$

Un'onda piana in tre dimensioni è della forma

$$\phi(\vec{x},t) = A\exp\left(-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}\right)$$

Osserviamo questo fatto: il valore di ϕ non cambia se ci spostiamo in un punto $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + 2\pi\boldsymbol{k}/|k|^2$. La quantità

$$\lambda = 2\pi/|k|$$

è denominata "lunghezza d'onda", il vettore $\boldsymbol{k}$ è detto il "*vettore d'onda*" e $\nu = \omega/2\pi = 1/T$

è detta la "*frequenza*" dell'onda piana e il suo inverso T è il periodo dell'oscillazione, mentre λ rappresenta la periodicità nello spazio. Queste grandezze sono legate dalla relazione

$$\lambda\,\nu = v$$

Per un'onda piana troviamo:

$$\phi(x,t) = \cos(kx - \omega t)$$

$$\mathcal{E}(x,y) = \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \tfrac{1}{2}T\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 =$$

$$\tfrac{1}{2}(\mu\omega^2 + Tk^2)\sin(kx - \omega t)^2$$

$$S = -T\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x} = T\,k\omega\,\sin(kx - \omega t)^2$$

Ma sappiamo che $T/\mu = v^2$, $\omega/k = v$ e quindi

$$S = Tk\omega = Tk^2 v, \;\; \mu\omega^2 = \mu k^2 v^2 = Tk^2$$

e ne segue la relazione già considerata prima tra S e densità di energia.

In 3 dimensioni l'equazione assume la forma

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \Delta\phi(\vec{x},t) \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

e le "onde piane" ne sono soluzioni

$$\phi(\vec{x},t) = A\cos\{\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \Phi\}$$

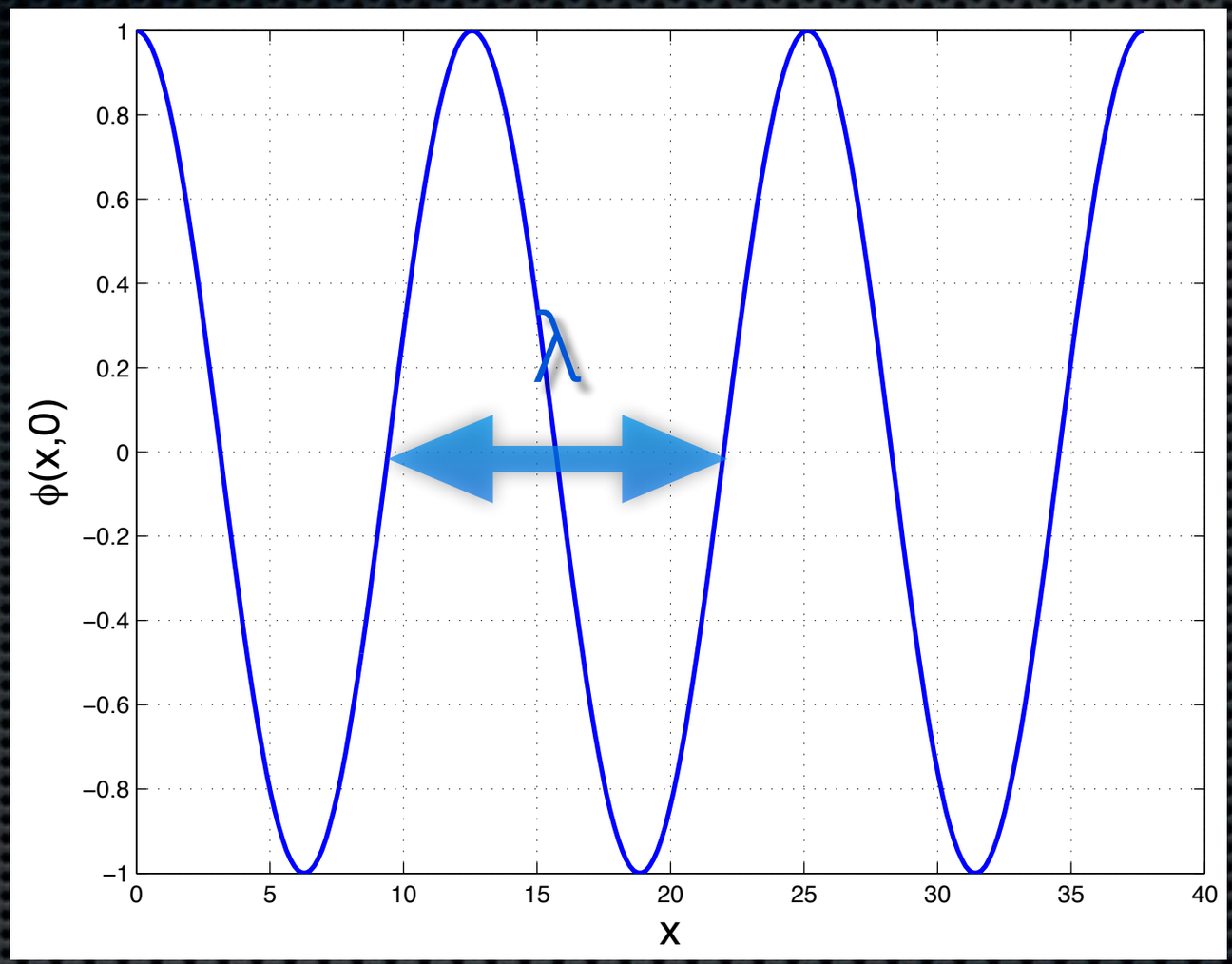
Il vettore $\boldsymbol{k}$ rappresenta la direzione di propagazione dell'onda. Se ci spostiamo in direzione $\boldsymbol{k}$ di una quantità

$$\lambda = 2\pi / |\boldsymbol{k}|$$

il valore di ϕ non cambia, dunque λ merita il nome di lunghezza d'onda anche in questo caso. Inoltre ω è legata a $\boldsymbol{k}$ dalla relazione

$\omega = v|\boldsymbol{k}|$ (*v è la velocità di propagazione)*

La parte reale dell'onda piana, a un certo istante, appare come una forma sinusoidale



e la lunghezza d'onda rappresenta la distanza su cui il valore dell'onda si ripete identicamente

Su tutto il piano definito da $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}$=*costante* la fase dell'onda è la stessa. Quindi il vettore $\boldsymbol{k}$ è ortogonale ai piani di fase costante. Esso viene denominato

"vettore d'onda"

Frequenza e lunghezza d'onda caratterizzano le onde piane. Nel caso elettromagnetico la velocità v è quella della luce $v=c\approx 3\times 10^{8}$ m/s. La lunghezza d'onda della luce visibile varia da 380 a 740 nm, $1nm = 10^{-9}m = 10^{-3}$ μ (micron) e la frequenza di conseguenza varia nel range $4\div 8\ 10^{14}$ Hz ossia il periodo di oscillazione è compreso tra 1/8 e 1/4 di *centesimo di picosecondo*. Grandezze che sfuggono alla nostra intuizione. Per avere un'idea, la frequenza dei microprocessori attuali è centomila volte più bassa...

Un diagramma su cui meditare…Assorbimento delle onde e.m. in funzione della frequenza per l'acqua. Il range del visibile penetra fino a milioni di volte più a fondo nell'acqua rispetto a u.v., X, gamma, microonde. Cosa vi dice ciò ?

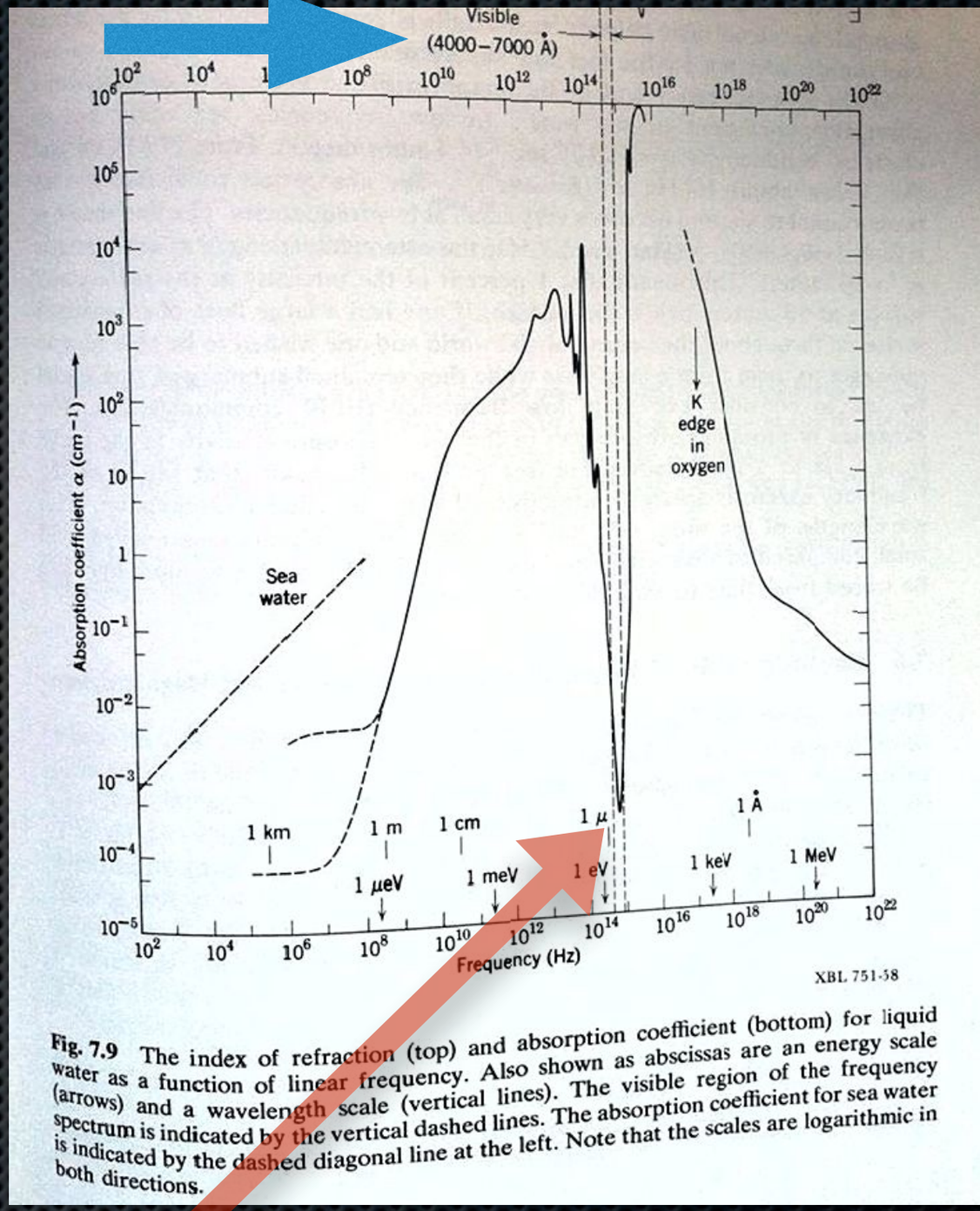


Fig. 7.9 The index of refraction (top) and absorption coefficient (bottom) for liquid water as a function of linear frequency. Also shown as abscissas are an energy scale (arrows) and a wavelength scale (vertical lines). The visible region of the frequency spectrum is indicated by the vertical dashed lines. The absorption coefficient for sea water is indicated by the dashed diagonal line at the left. Note that the scales are logarithmic in both directions.

È un semplice esercizio verificare che anche per le onde piane in 3-dim vale la relazione tra densità di energia e flusso di energia:

$$|S(x,t)| = v\, E(x,t)$$

(cap. 20.6 del Gettys)

Onde stazionarie

Vibrazione della corda di violino

18 maggio 2015

Studiamo le oscillazioni di una corda di violino fissata alle due estremità e tenuta a una tensione T regolando la chiavetta. L'equazione d'onda in questo caso si riduce a un'equazione di facile soluzione. Cerchiamo infatti soluzioni periodiche nel tempo della forma

$$\varphi(x,t) = f(x)\, e^{-i\,\omega\, t}$$

da inserire nell'equazione d'onda:

$$f''(x)\, e^{-i\,\omega\, t} = -\omega^2 f(x)\, e^{-i\,\omega\, t} \,/\, v^2$$

da cui….

$$f''(x) + (\omega/v)^2 f(x) = 0$$

E` l'equazione di un'oscillatore semplice che ha come soluzione

$$f(x) = C\ sin(k\ (x\text{-}x_0)$$

con $k = \omega / v$ *e con* C *e* x_0 *costanti arbitrarie* - per sincerarsene si può sostituire questa funzione nell'equazione e verificarne la correttezza. Ora però dobbiamo richiedere che la corda stia fissa alle estremità e cioè (se la corda è lunga *L*)

$$f(0)=f(L)=0$$

Si trova allora: $x_0=0$ *e* $sin(kL)=0$. Dato che la funzione *seno* si annulla per tutti gli angoli multipli di π siamo indotti a concludere che

$$k = n\ \pi/L,\ n=1,2,3,\ldots.$$

Abbiamo così ricavato tutte le possibili frequenze di vibrazione della corda: la frequenza più bassa corrisponde a $n=1$ e cioè

$$\omega = \pi\, v/L = \pi\, (T/\mu)^{1/2}/L$$

Facciamo una prova con valori ragionevoli dei parametri: $\mu = 20\ g/m$, $L=30\ cm$, $T = 200\ N$. Si trova

$\nu=\omega/2\pi=0.5\times(200/0.02)^{1/2}\ /0.30 \approx 166.4\ Hz.$

un valore del tutto realistico secondo la tabella che segue

Qualche esempio di frequenza del suono per strumenti musicali

strumento	frequenza
nota bassa di organo C_0	16 Hz
do nella parte bassa del pianoforte C_1	32.7 Hz
nota bassa del violoncello C_2	65 Hz
nota bassa del violino C_3	130 Hz
nota alta di flauto C_7	2093 Hz
$A_4 = la_3$	440 Hz

L’effetto Doppler

Un’onda della forma già considerata

$\phi = A \cos(kx - \omega t)$ è osservata da un punto in moto rispetto alla sorgente con velocità u.

L’osservatore descriverà l’onda come la ϕ riferita alle sue coordinate $x' = x - u\,t$, dunque

$$\phi = A \cos(k(x'+ut)-\omega t) = A \cos(kx'-(\omega-uk)t)$$

Questo significa che per l’osservatore in moto con velocità u la frequenza dell’onda è

$$\omega' = \omega(1-uk/\omega) = \omega(1-u/v)$$

Si trova quindi che la frequenza percepita dall'osservatore è minore se la sua velocita` è nella stessa direzione della sorgente e maggiore nel caso contrario. Questo è l'effetto *Doppler*, che sussiste anche per le onde luminose.

Ovviamente in quest'ultimo caso il rapporto u/c è sempre piccolissimo nella nostra esperienza corrente, mentre per le onde sonore *u/v* è abbastanza grande da permetterne l'osservazione.

Viaggiando a 260 km/h verso la sorgente sonora un La si percepisce come un Do#

È necessario tuttavia distinguere tra il caso procedente (sorgente fissa rispetto all'aria e osservatore in moto) e quello di un osservatore fermo e la sorgente in movimento. Supponiamo che il ricevitore sia fermo e la sorgente viaggi verso di esso a velocità *u a distanza D e sia T il periodo (1/frequenza).* Il massimo dell'onda impiega un tempo $t_1=D/v_s$ a raggiungere il ricevitore; il massimo successivo arriverà a un tempo $t_2= T + (D-u\ T)/v_s$ in quanto la sorgente sonora si è nel frattempo spostata di $u\ T$, dunque il secondo massimo raggiunge il ricevitore con un ritardo $T(1-u/vs)$.

In conclusione per la sorgente in movimento si ha $\omega' = \omega/(1-u/v)$ mentre per il caso del ricevitore in movimento si ha $\omega' = \omega(1-u/v)$.



In generale si ha dunque

$$\omega' = \omega(1-u_{ric}/v_S)/(1-u_{sorg}/v_S)$$

Come regola generale la frequenza aumenta se sorgente e ricevitore si avvicinano, diminuisce se si allontanano, ma la formula precisa dipende da chi è in movimento.

Come regola generale la frequenza aumenta se sorgente e ricevitore si avvicinano, diminuisce se si allontanano, ma la formula precisa dipende da chi è in movimento. Si noti che per velocità piccole rispetto a quella del suono ($v_S = 340$ m/s ≈ 1230 km/h) si ha la formula approssimata

$$\omega' = \omega(1+(u_{sorg}-u_{ric})/v_S))$$

l'errore *percentuale* essendo dell'ordine di

$$u_{sorg}(u_{sorg}-u_{ric})/v_S^2))$$

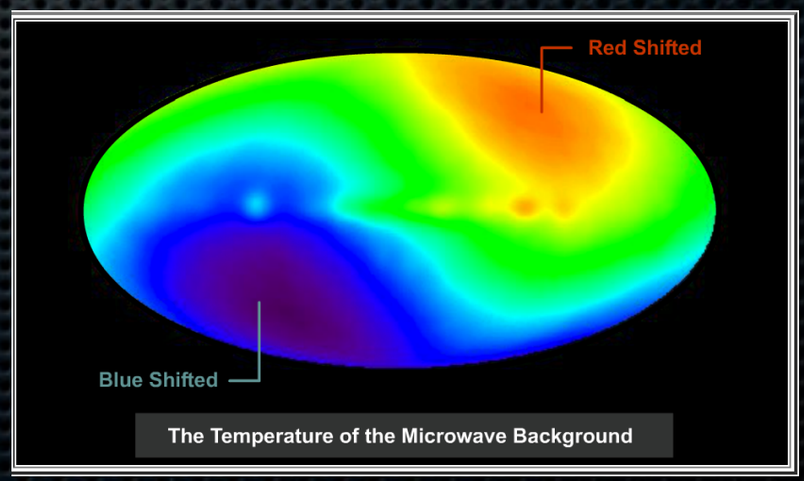
che è piccolo sia per sorgente in moto lento sia per una piccola velocità relativa.

L’effetto Doppler per la luce

Per la luce si trova che vale la formula

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

dove v è la velocità relativa con cui sorgente e ricevitore si allontanano. Il diagramma qui di seguito evidenzia l’effetto sulla radiazione cosmica di fondo dovuta alla velocità tangenziale del sistema solare rispetto al resto dell’Universo



DIFFRAZIONE E INTEFERENZA DELLE ONDE

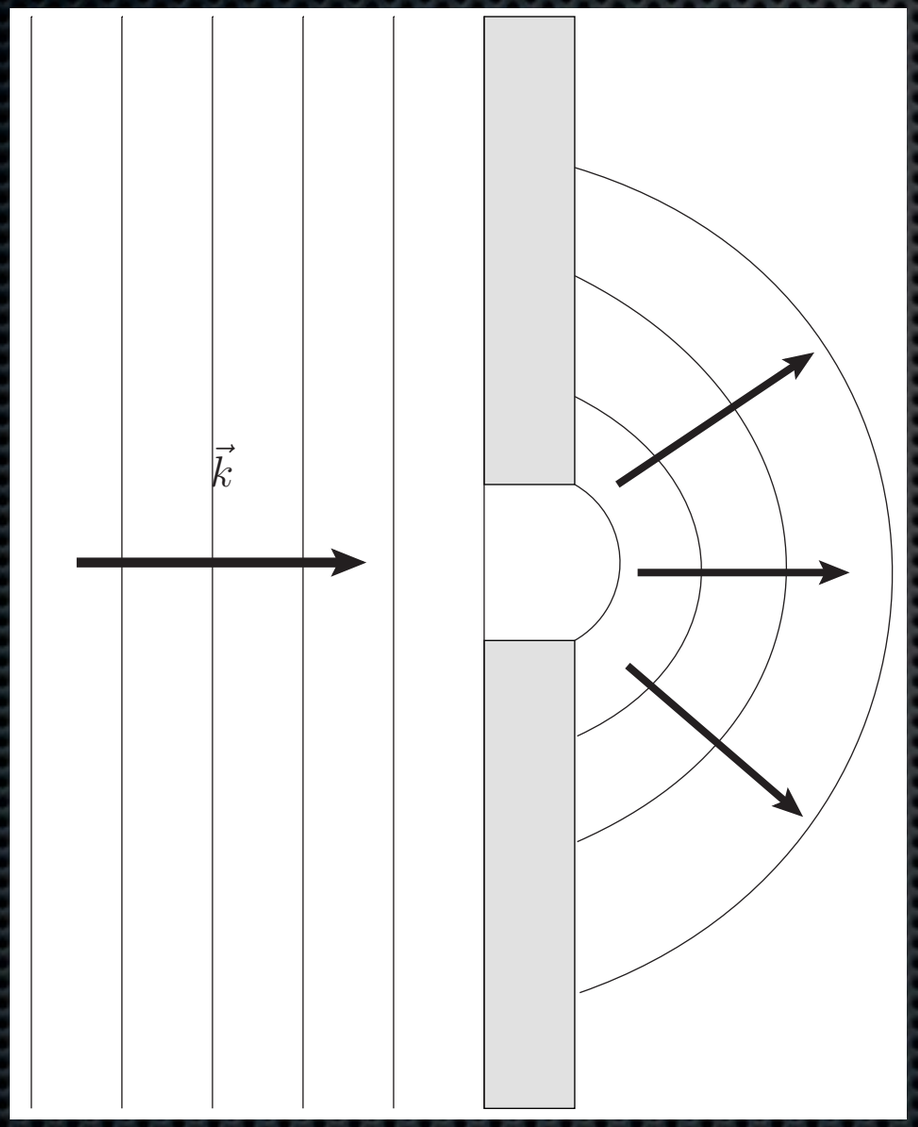
18 maggio 2015

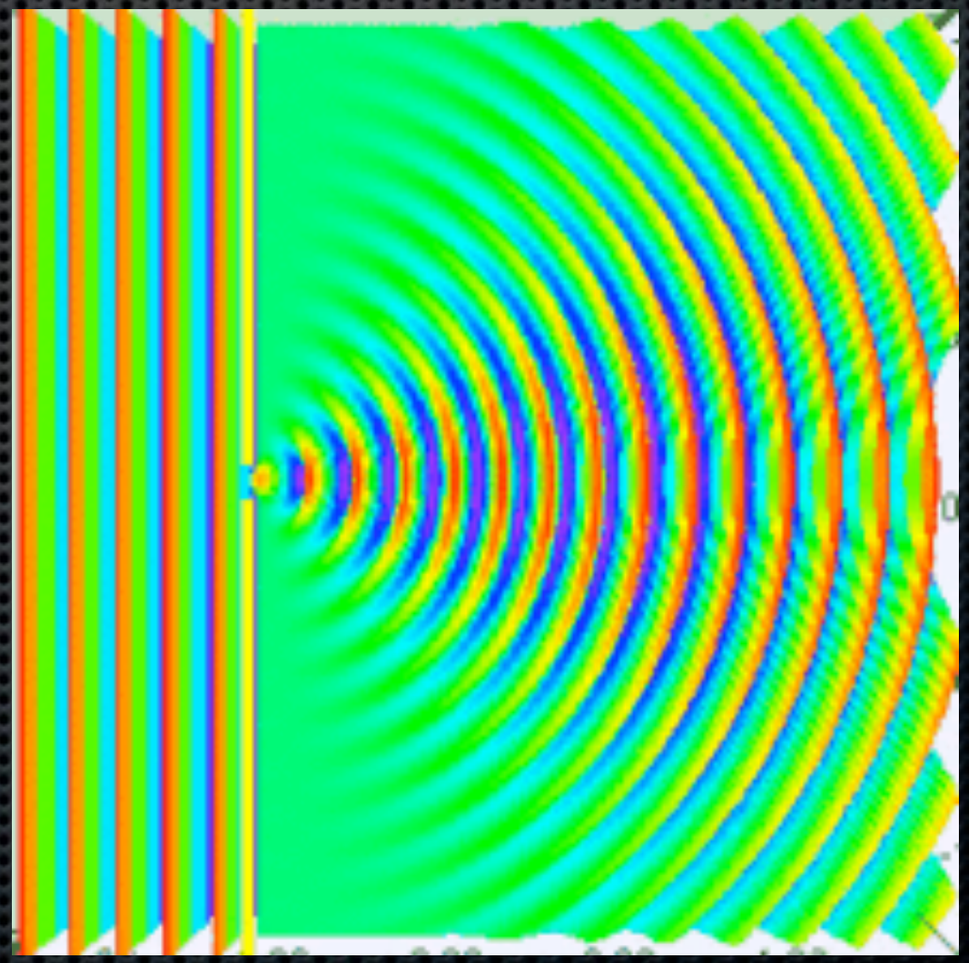
Un'onda generica è data dalla sovrapposizione lineare di onde piane e assume la forma

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3k\, A(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - v|k|t}$$

La trattazione matematica delle onde richiede tecniche di Analisi Matematica non ancora alla vostra portata, ad es. la cosiddetta "analisi di Fourier". Tuttavia è possibile studiare in modo qualitativo alcune proprietà importanti nella propagazione delle onde. Un primo fenomeno importante è quello della *diffrazione.*

Se un’onda piana incide su un ostacolo che presenta una sottile fessura, la maggior parte dell’onda è riflessa all’indietro mentre la parte che incide sulla fessura origina un’onda sferica





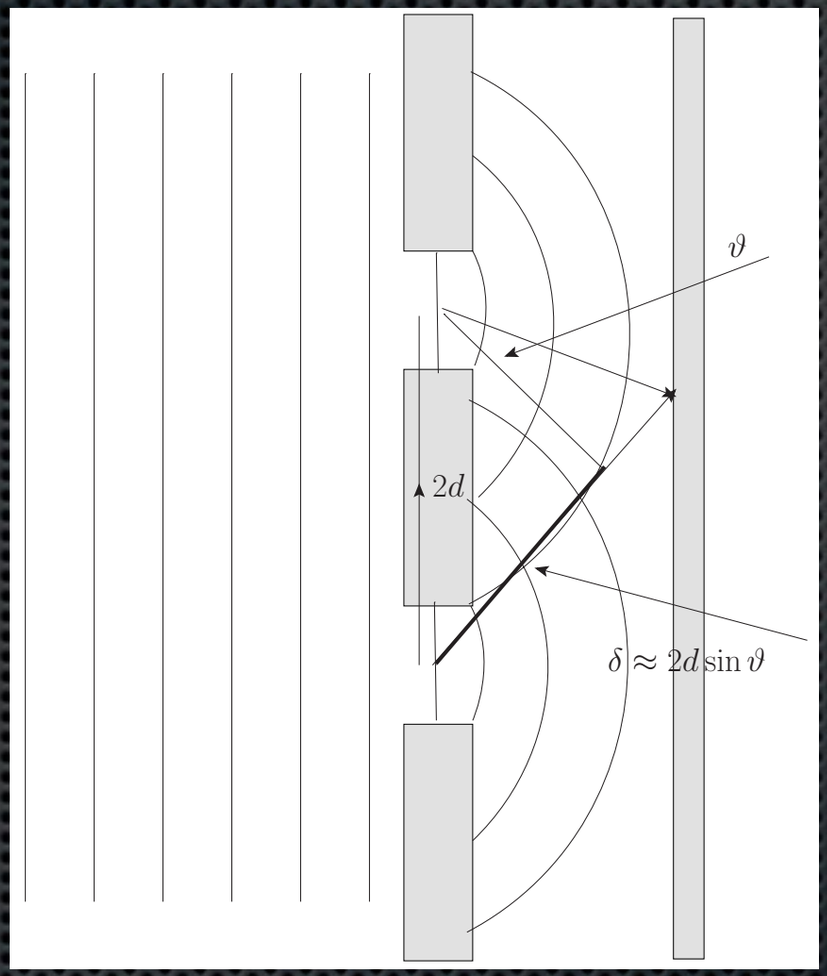
Qui le linee indicano le superfici di fase costante.

Un altro fenomeno è quello della interferenza. Due onde della stessa frequenza possono incontrarsi e combinarsi in un'unica onda con l'effetto di aumentare o diminuire l'intensitá in dipendenza della fase. Nel caso più semplice

$$A\,exp(ikx) + A\,exp(ik(x+\delta)) = A(1+e^{ik\delta})\,e^{ikx}$$

Ne origina un'onda con la stessa lunghezza d'onda ma ampiezza A modificata per un fattore $1+e^{ik\delta}$. Se δ è piccolo si ha un'ampiezza più grande, mentre se δ è vicina a π il risultato è quello di diminuire o addirittura annullare l'ampiezza dell'onda. Si dice che le onde "interferiscono costruttivamente" (*δ piccolo o zero*) o "distruttivamente" (*δ vicino a π*).

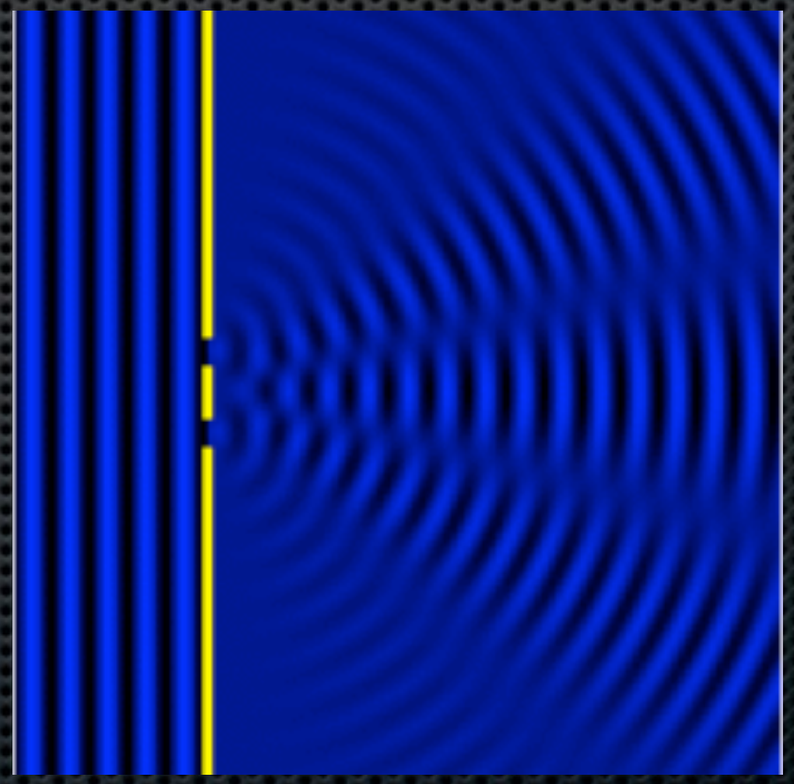
L’interferenza può prodursi nel caso di uno schermo che blocca l’onda tranne che per due fenditure, come in questo caso



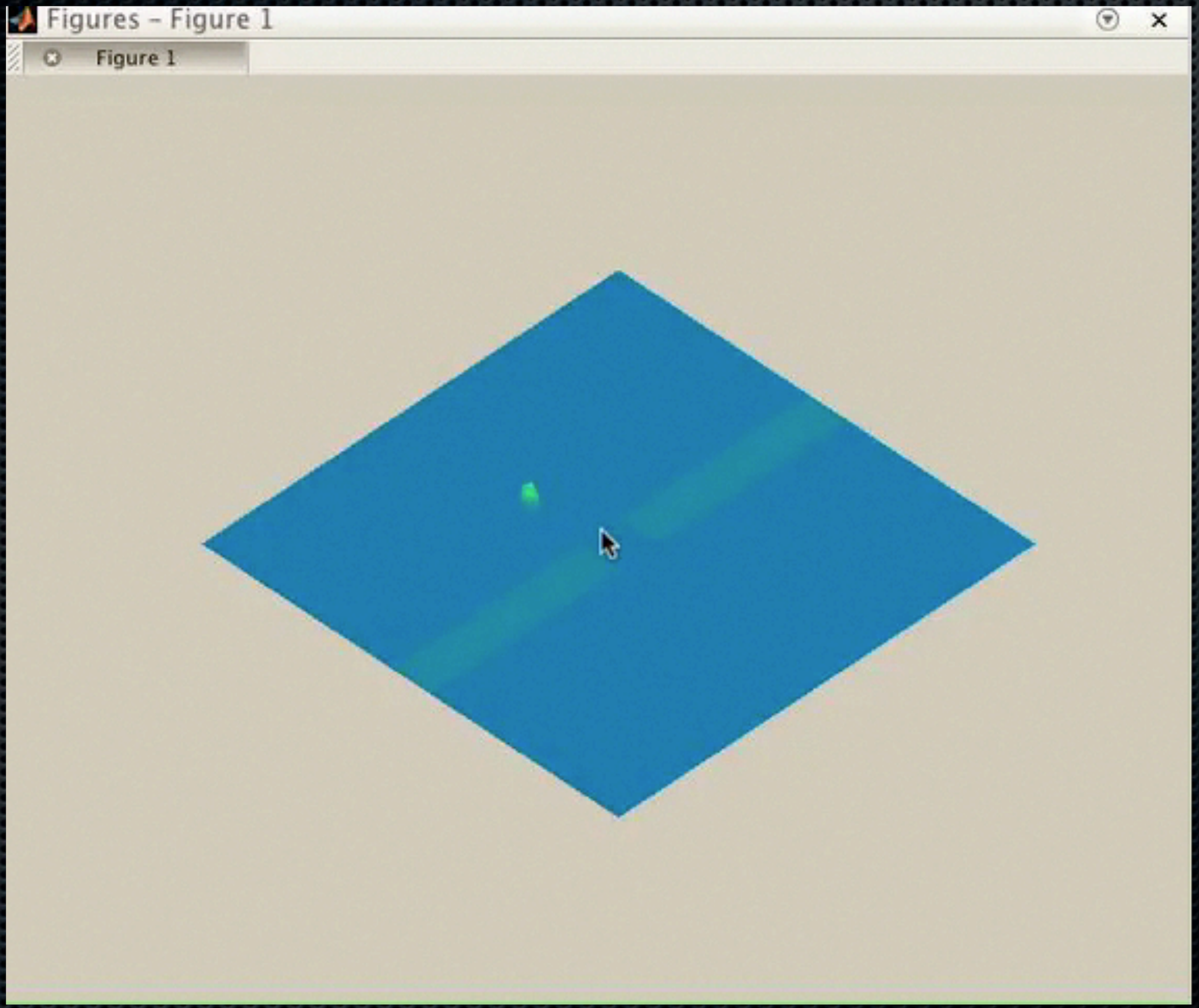
Sullo schermo di destra le due onde che arrivano interferiscono e il loro sfasamento è $\approx 2\,d \sin\theta$

Ne risulta una successione di massimi e minimi di intensità che vengono denominati “frange di interferenza”. I massimi corrispondono agli angoli per cui $2d \sin \Theta = n \lambda$

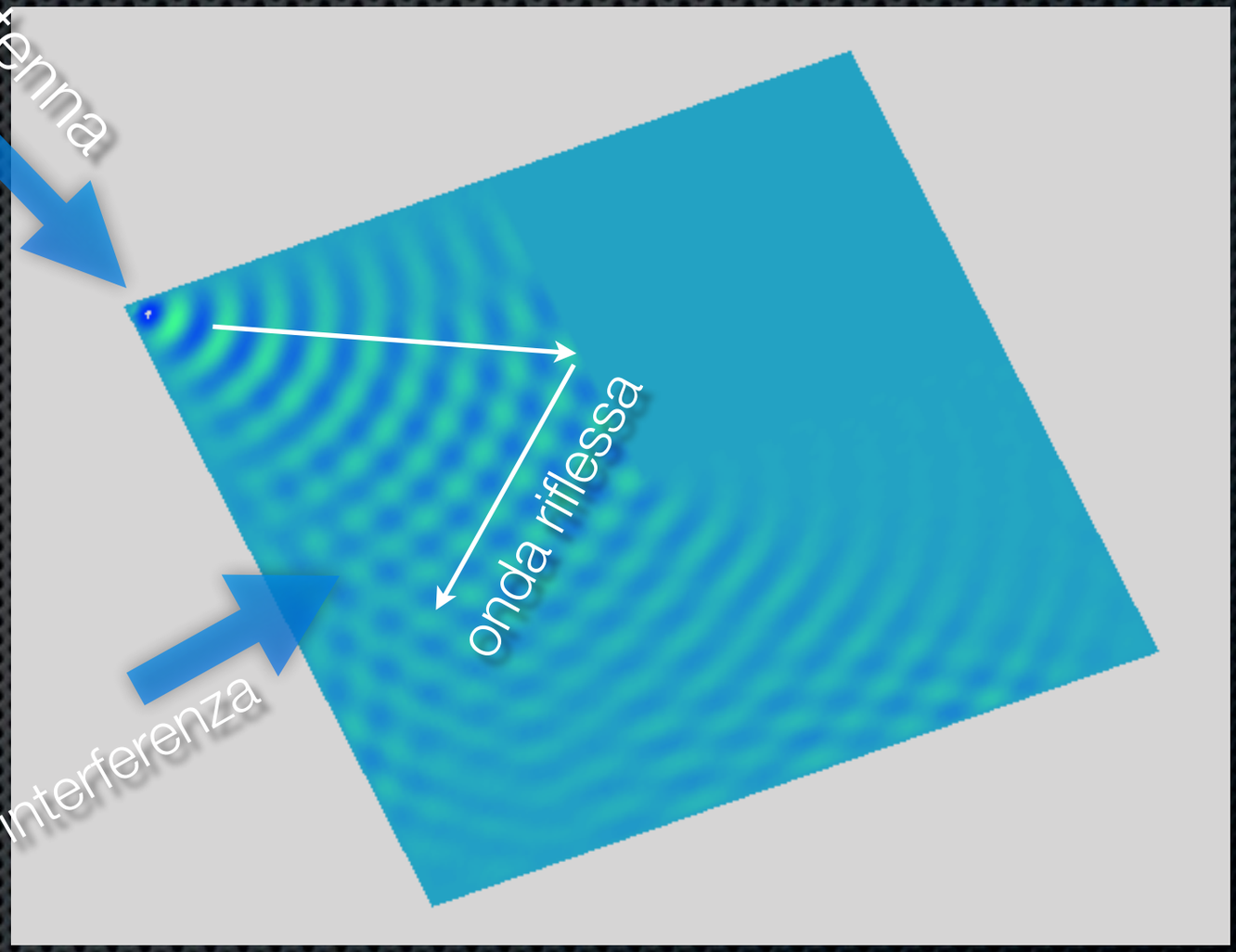
nota come “legge di Bragg” alla base dello studio dei cristalli con onde elettromagnetiche ad alta frequenza.



Onde superficiali in uno specchio d’acqua.



La simulazione precedente riguarda la propagazione di un impulso iniziale. Un altro caso anche più interessante è quello della generazione di onde con apporto continuo di energia, come nel caso di un’antenna - ricordate il problema quando studierete le onde elettromagnetiche!



Prossime lezioni

I. Meccanica dei fluidi (liquidi, gas).

II. Termodinamica

18.5.2015

FINE

della XI lezione

Prossima lezione lunedì
19 maggio
ore 14:30